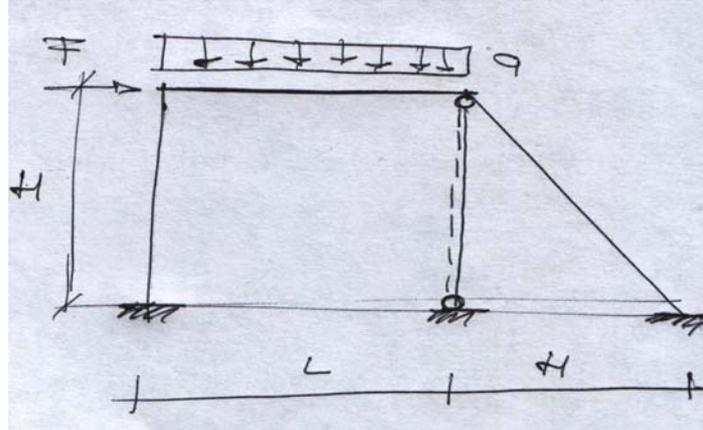


**Università degli Studi di Salerno – Facoltà di Ingegneria**  
**Corso di Tecnica delle Costruzioni I – Nuovo Ordinamento**  
**Anno accademico 2005-2006**  
**Prova scritta - 11/04/2007**

**Esercizio n. 1 (Punti 8)**

Si analizzi la struttura in figura rappresentandone i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione (N, T, M).



Si assumano i seguenti valori numerici:

- Sezioni degli elementi:

Sezioni Aste dei ritti

$$b_r = 30 + N \text{ cm};$$

$$h_r = 40 + C \text{ cm}$$

Sezione della mensola

$$b_t = 30 \text{ cm}$$

$$h_t = 50 + N \text{ cm}$$

Sezione del pendolo CG

$$b_p = h_p = 10 + 2 C$$

- Altri parametri:

$$L = 400 + 50 C - 20 N \text{ cm};$$

$$\Delta t = 20^\circ\text{C};$$

$$\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$H = 200 + 20 C \text{ cm};$$

$$F = 10.0 + C - N \text{ kN};$$

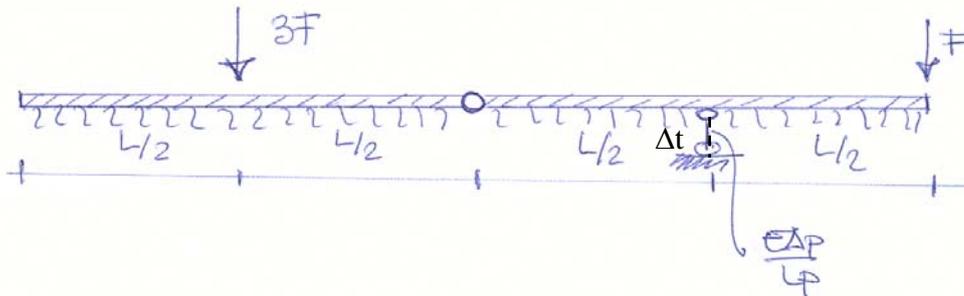
$$q = 20.0 + 2.0 C + 1.5 N \text{ kN/m};$$

$$R_{ck} = 25.0 \text{ MPa}$$

(N.B.: Con i simboli C e N si intende il numero di lettere che compongono cognome e nome, rispettivamente)

**Esercizio n. 2 (Punti 6)**

Si risolva la trave di fondazione rappresentata nel seguito:



Si assumano i seguenti valori numerici per le grandezze geometriche:

- $B = 100 \text{ [cm]}$

- $L = 4.0 + 0.5 C \text{ [m]}$

- $F = 100.0 + 5.0 N \text{ [kN]}$

- $k_0 = 0.01 \text{ N/mm}^3$

- $\Delta t = -20^\circ\text{C}; \alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

- si assuma l'ipotesi di pendolo infinitamente rigido;

Se ne rappresenti l'andamento della reazione del terreno e delle caratteristiche della sollecitazione.

ESERCIZIO N. 1. - Soluzione secondo il MdS

1. Classificazione della struttura

Per classificare la struttura dal punto di vista del numero di nodi spostabili si considera la STRUTTURA RETICOLARE

ASSOCIATA rappresentata nella figura a lato. Il pseudo è stato omesso poiché essendo estensibile non detta ai nodi cui

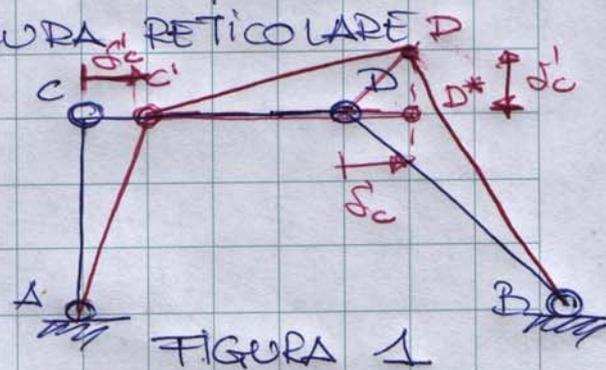


FIGURA 1

si come una condizione cinematica indipendente dalla soluzione del problema.

La suddetta struttura risulta UNA VOLTA LABILE poiché:

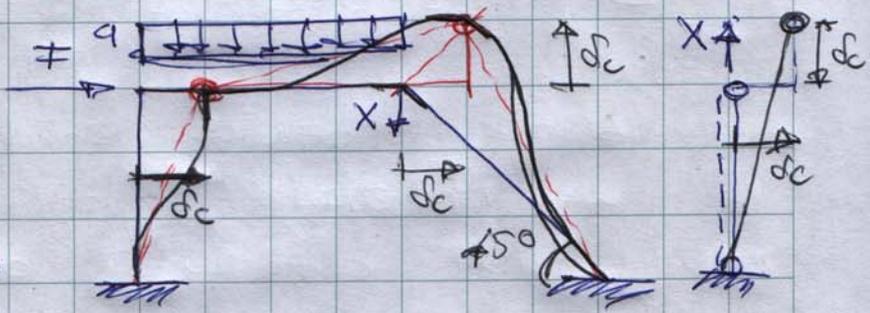
$$l = 3t - 2c = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

e peraltro qualsiasi campo di spostamenti rigido infinitesimo è legato ad un unico parametro cinematico: nella figura di sopra si mostra un possibile campo di spostamenti "regolato" dallo spostamento orizzontale ~~del~~  $\delta_c$  del nodo C.

# Individuazione delle incognite.

Nello spinto del HdS le incognite sono  
 tipo "spostamento" ed, in particolare, riguan-  
 do le rotazioni di nodi interni ed  
 un numero minimo di spostamenti nodali  
 e consente di descrivere la configurazione  
 deformata della struttura. Quanto alle  
 rime, nella fattispecie sono incognite le  
 rotazioni  $\varphi_c$  e  $\varphi_b$ , mentre, secondo l'ipotesi  
 di INESTENSIBILITÀ DELLE ASTE, onde  
 campo di spostamenti (in senso stretto)  
 della struttura è governato  
 da un solo parametro indipendente  
 l'esempio dello spostamento orizzontale  
 al nodo C:

numero di  
 nodi spostabili  
 della struttura  
 pari al GRADO  
 DI LIBERTÀ DELLA  
 STRUTTURA RETICOLARE  
 ASSOCIATA.  
 In definitiva  
 vettore degli



- CONF. INDEFORMATA
- DEFORMATA CINEMATICA
- DEFORMATA A NODI
- CON ROTAZIONI BLOCCATE

FIGURA 2



postamenti incogniti  $s$  e' definito  
che segue

$$s = \{ \varphi_c, \varphi_D, \delta_c \}$$

ella FIGURA 2 il pedolo e' stato  
sostituito dall'azione  $X$  che esso esprime  
alla struttura e rappresentato a lato  
alla stessa ~~posizione~~ insieme alla configurazione  
deformata assunta PER CONGRUENZA  
ISPETTO ALLA STRUTTURA.

Scrittura delle equazioni di equilibrio

La prima equazione deriva dall'equilibrio  
la ROTAZIONE imposto al nodo C:

$$M_{CA} + M_{CD} = 0$$

dove

$$k_{CA} \cdot \varphi_c + k_{CD} \cdot \varphi_D - U_{CA} \cdot \delta_c + \frac{1}{2} U_{CD} \cdot \varphi_c + U_{CD} \cdot \varphi_D - U_{CD} \cdot \delta_D = 0 \quad (1)$$

Poiche' vale  $s_{00}$  per la struttura oggetto



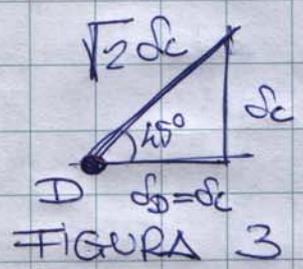
di studio che per quella reticolare associata (sebbene per ragioni diverse!) l'ipotesi di INESTENSIBILITÀ DELLE ASTE si possono stabilire le seguenti tabelle di corrispondenza tra gli spostamenti del nodo C ed i corrispondenti spost. TRASVERSALI RELATIVI DELLE ASTE:

STRUTTURA IN STUDIO  
- CAMPO DI SPOST. EFFETTIVI -

STRUTT. RETIC. ASSOCIATA  
- CAMPO DI SPOST. VIRTUALE -

	$d_c$
$d_{AC}$	1
$d_{CD}$	-1
$d_{BD}$	$\sqrt{2}$

	$d'_c$
$d'_{AC}$	1
$d'_{CD}$	-1
$d'_{BD}$	$\sqrt{2}$



In definitiva la (1) si scrive come segue

$$(W_{CA} + W_{CD}) \varphi_C + V_{CD} \varphi_D - (U_{CA} - U_{CD}) d_c = -M_{CD} \quad (1')$$



La seconda equazione deriva dall'equilibrio alla rotazione del nodo D

$$M_{DC} + M_{DB} = 0$$

$$W_{DC} \cdot Q_D + V_{DC} \cdot Q_C - U_{DC} \cdot S_{DC} + M_{DC} +$$

$$W_{DB} \cdot Q_D + V_{DB} \cdot Q_B - U_{DB} \cdot S_{DB} = 0 \quad (2)$$

da cui

$$(W_{DB} + W_{DC}) Q_D + V_{DC} \cdot Q_C - (U_{DB} \cdot \sqrt{2} - U_{DC}) \cdot S_C = 0 \quad (2')$$

Infine la terza equazione di equilibrio deriva dall'equilibrio globale imposto sulla struttura verticale

associata con la somma delle azioni esterne e dei momenti nodali che servono a renderla corrispondenti alla struttura di partenza

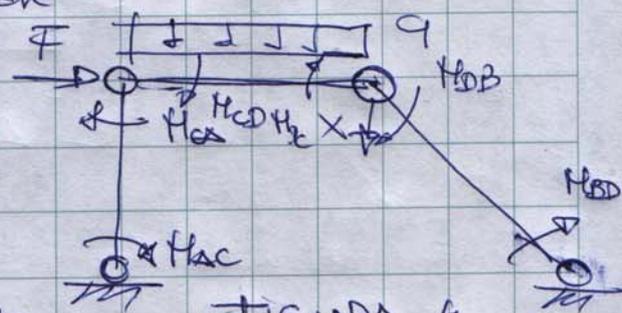


FIGURA 4

la risultante del sistema di forze applicato è uguale e opposta a zero (la struttura

reticolare associata e infatti (ABUE). Questa condizione si può imporre tramite l'equazione simbolica della statica

$$\delta L = 0$$

dove  $\delta L$  è il lavoro delle forze (e dei momenti) applicati alla struttura di FIGURA A, per il campo di spostamenti virtuali rappresentato nella FIGURA A:

$$\begin{aligned} & (M_{AC} + M_{CA}) \frac{\delta s_{CA}'}{H} + (M_{BD} + M_{DB}) \frac{\delta s_{BD}'}{\sqrt{2}H} + (M_{CD} + M_{DC}) \frac{\delta s_{CD}'}{L} \\ & + F \cdot \delta c' - \left( \frac{qL}{2} \right) \cdot \frac{\delta c'}{2} - X \cdot \delta c' = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} & \frac{W_{AC} \cdot \varphi_A + W_{CA} \cdot \varphi_C - U_{AC} \cdot \delta s_{AC} + W_{CA} \cdot \varphi_C + W_{CA} \cdot \varphi_A - U_{CA} \cdot \delta c}{H} \\ & + \frac{W_{BD} \cdot \varphi_B - U_{BD} \cdot \delta s_{BD} + W_{DB} \cdot \varphi_D - U_{DB} \cdot \delta s_{BD}}{\sqrt{2}H} \cdot \sqrt{2} \delta c' + \\ & \frac{W_{CD} \cdot \varphi_C + W_{DC} \cdot \varphi_D - U_{CD} \cdot \delta s_{CD} + U_{CD} + W_{DC} \cdot \varphi_D + W_{DC} \cdot \varphi_C - U_{DC} \cdot \delta s_{CD} + M_{DC}}{L} \\ & + F \cdot \delta c' - \frac{qL}{2} \cdot \delta c' - X \cdot \delta c' = 0 \end{aligned}$$



**Italcementi**  
Italcementi Group

da cui

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{W_{CA} + V_{AC}}{H} \cdot q_c - \frac{U_{CA} + U_{AC}}{H} \cdot d_c + \frac{W_{DB} + V_{BD}}{\sqrt{2} H} \cdot \sqrt{2} \cdot q_D + \right. \\
 & \left. - \frac{U_{BD} + U_{DB}}{\sqrt{2} H} \cdot \sqrt{2} \cdot d_c \cdot \sqrt{2} - \frac{W_{CD} + V_{DC}}{L} \cdot q_c + \right. \\
 & \left. - \frac{W_{DC} + V_{CD}}{L} \cdot q_D - \frac{U_{CD} + U_{DC}}{L} \cdot d_c - \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L} + \right. \\
 & \left. + F - \frac{qL}{2} - X \right] \cdot d'_c = 0
 \end{aligned}$$

Ricordando che, per la genericità esta  $ij$ , si ha

$$U_{ij} = \frac{W_{ij} + V_{ji}}{l_{ij}}$$

risultata

$$\begin{aligned}
 & \left[ (U_{CA} - U_{CD}) \cdot q_c + (\sqrt{2} U_{DB} - U_{DC}) \cdot q_D \right. \\
 & \left. - \left( \frac{U_{CA} + U_{CA}}{H} + \frac{U_{BD} + U_{DB}}{H} \cdot \sqrt{2} + \frac{U_{CD} + U_{DC}}{L} \right) d_c \right. \\
 & \left. + F - \frac{qL}{2} - \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L} - X \right] d'_c = 0
 \end{aligned}$$

Poiché la quantità  $d'_c$  rappresenta l'entità  
 ARBITRARIA dello spostamento virtuale



~~al~~ al primo membro dell'eq. precedente  
 il prodotto  $\sqrt{\epsilon}$  nullo quando nullo  $\epsilon$   
 il primo il suo primo fattore

$$\begin{aligned} & (U_{CD} - U_{CA}) \rho_C + (U_{DC} - \sqrt{2} U_{DB}) \rho_D + \left[ \frac{U_{CA} + U_{CE}}{H} + \frac{U_{BD} + U_{DB}}{H} \cdot \sqrt{2} \right. \\ & \left. + \frac{U_{CD} + U_{CE}}{L} \right] \cdot \delta_C + X = \mp \frac{qL}{2} - \frac{U_{DC} + U_{CD}}{L} \end{aligned} \quad (3'')$$

Nella (3'') compare anche il valore  
 dello sforzo normale nel pedolo di  
 esodo estensibile  $\rho_C$  e nel ricambio  
 in funzione del suo allungamento. Dalla  
 FIGURA 2 si vede che, per congruenza,  
 la variazione di lunghezza del pedolo  
 per effetto dello spostamento  $\delta$  vale

$$\Delta l_p = \delta_c \quad (4')$$

positiva quando rappresenta uno elonga-  
 zione. Inoltre, dalle relazioni "costitutive"  
 del pedolo risulta

$$\Delta l_p = \alpha \Delta t l_p + \frac{X l_p}{EA} \quad (4'')$$



**Italcementi**  
 Italcementi Group

Cambiando la  $k'$  e la  $k''$  si ha

$$X = \frac{EAP}{Lp} [d_c - \alpha \Delta t Lp] \quad (1''')$$

che, sostituita nella 3'' fornisce

$$(U_{CD} - U_{CA}) \varphi_c + (U_{DC} - \sqrt{2} U_{DB}) \varphi_B + \left[ \frac{U_{CA} + U_{AC}}{H} + \frac{U_{BD} + U_{DB}}{H} \sqrt{2} + \frac{U_{CD} + U_{DC}}{L} + \frac{EAP}{Lp} \right] \cdot S = F - \frac{qL}{2} - \frac{U_{BD} + U_{DB}}{L} + \frac{EAP}{Lp}$$

Il sistema di equazioni costituito dalla 1'', 2'' e 3''' ha per uniche incognite le 3 componenti del VEETTORE DEGLI SPOSTAMENTI NODALI S.  
Esso si può porre nella seguente forma matriciale

$$\begin{bmatrix} W_{CA} + W_{CD} & + V_{CD} & + U_{CD} - U_{CA} \\ V_{DC} & W_{DB} + W_{DC} & U_{DC} - \sqrt{2} U_{DB} \\ U_{CD} - U_{CA} & U_{DC} - \sqrt{2} U_{DB} & \frac{U_{CA} + U_{AC}}{H} + \frac{U_{BD} + U_{DB}}{H} \sqrt{2} + \frac{U_{CD} + U_{DC}}{L} + \frac{EAP}{Lp} \end{bmatrix} \cdot S = \dots$$



$$\begin{bmatrix} \varphi_c \\ \varphi_D \\ \delta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_{cd} \\ -\mu_{dc} \\ F - \frac{qL}{2} - \frac{\mu_{cd} + \mu_{dc}}{L} + \alpha \Delta t \end{bmatrix}$$

In forma simbolica

$$\underline{K} \cdot \underline{s} = \underline{Q}$$

da cui

$$\underline{s} = \left[ \underline{K} \right]^{-1} \cdot \underline{Q}$$

Si osserva che  $\underline{K}$  è simmetrica e definita positiva.

#### A. DETERMINAZIONE DELLE CARATT. DELLA SOLLECITAZIONE

— Momenti flettenti

per tutte le aste  $ij$  si ha

$$M_{ij} = W_{ij} \varphi_i + V_{ij} \varphi_j - U_{ij} \delta_{ij} + M_{ij}^f$$

con i valori calcolati di  $\overline{\varphi_c}$ ,  $\overline{\varphi_D}$  e  $\overline{\delta_c}$ .



**Italcementi**  
Italcementi Group

### - Taglio

Su tutte le aste i tagli  $T_{ij}$  e  $T_{ji}$  agli estremi delle aste  $z$  determinano per equilibrio delle aste

$$T_{ij} = \frac{q_{ij} l_{ij}}{2} - \frac{M_{ij} + M_{ji}}{l_{ij}}$$

$$T_{ji} = -\frac{q_{ij} l_{ij}}{2} - \frac{M_{ij} + M_{ji}}{l_{ij}}$$

### - Sforzi normali

#### Equilibrio del nodo C

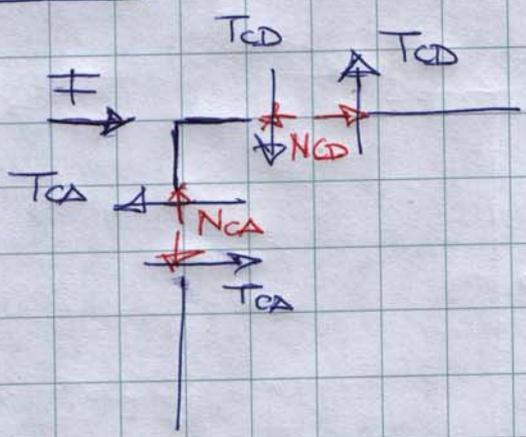
eq. tr. vert:  $T_{CD} - N_{CA} = 0$

$$N_{CA} = T_{CD}$$

eq. tr. orizz.

$$F - N_{CD} - T_{CA} = 0$$

$$N_{CD} = F - T_{CA}$$

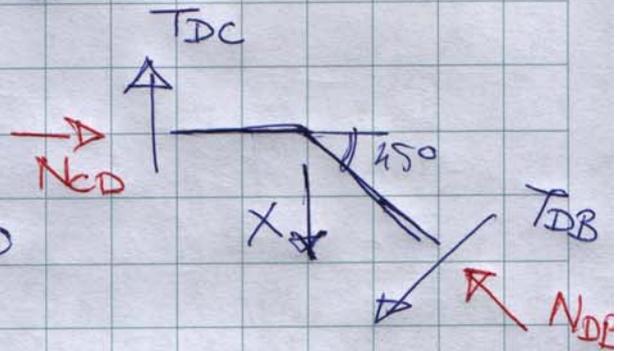


## Equilibrio nodo D

eq. tr. orizzontale:

$$N_{CD} - N_{DB} \frac{\sqrt{2}}{2} - T_{DB} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$N_{DB} = \sqrt{2} N_{CD} - T_{DB}$$



eq. fr. verticale

$$X - T_{DC} - N_{DB} \frac{\sqrt{2}}{2} + T_{DB} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$X = T_{DC} + N_{DB} \frac{\sqrt{2}}{2} - T_{DB} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

come controllo finale ~~da~~ si può verificare  
che la  $X$  ~~risultante~~ ottenuta dall'equilibrio  
multiplicata a quella derivante dalla  
congiunta

$$\bar{X} = \frac{EAP}{L} [\bar{\delta}_c - \alpha \Delta t l \varphi]$$

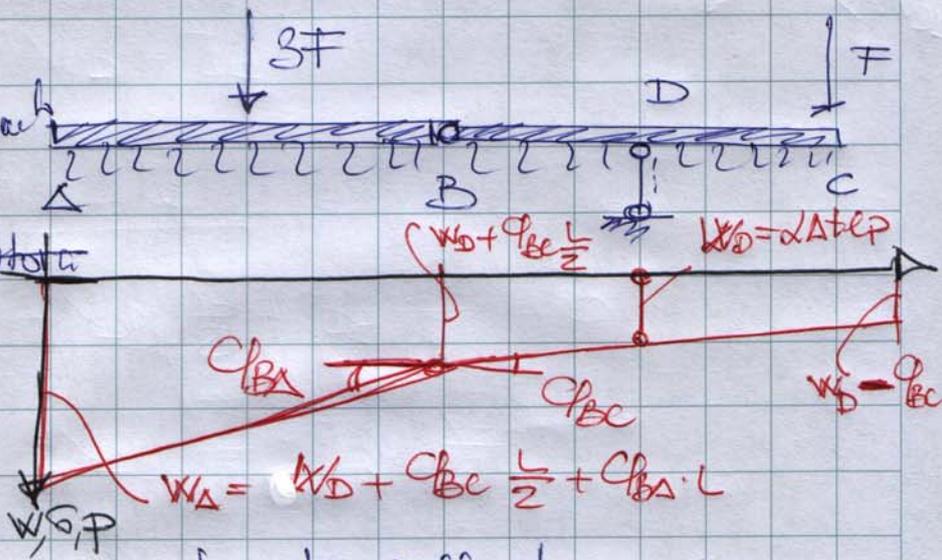


# Esercizio N.2.

1. Scelta delle incognite cinematiche e parametrizzazione del campo di spostamenti.

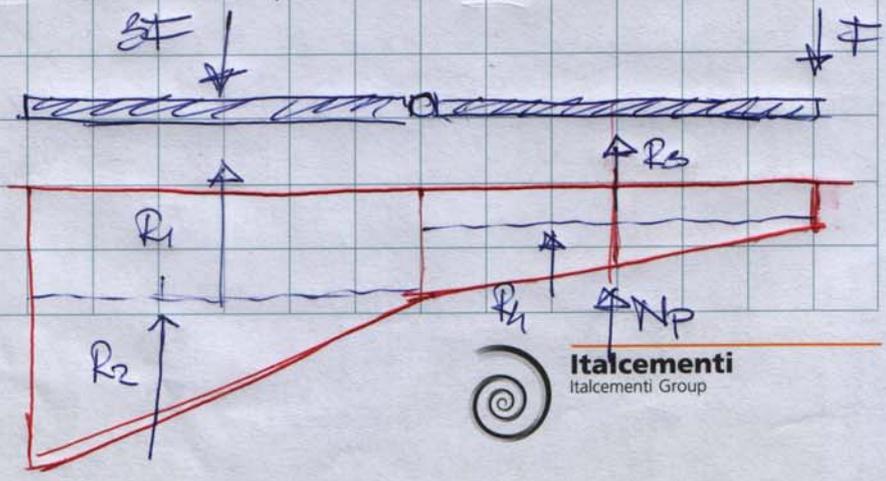
Poiché il pendolo risulta rigido assialmente, il punto D subisce un abbassamento e

una rotazione pari alla distorsione termica  $\alpha \Delta t$  del pendolo. Pertanto



il campo di spostamenti della trave è completamente definito dalle due rotazioni  $\rho_{BA}$  e  $\rho_{BC}$  dei due tratti rispetto a B.

Assunta l'ipotesi di winkler di reazione del terreno si ottiene moltiplicando punto per punto l'abbassamento per la costante  $k = k_{ab}$ .



La risultante delle ~~azioni~~ del terreno può essere scomposta in 4 contributi  $R_1, \dots, R_4$ :

$$R_1 = k w_B \cdot L = kL \left( \alpha \Delta t_{lp} + \underline{q_{BC}} \cdot \frac{L}{2} \right)$$

$$R_2 = k (w_A - w_B) \frac{L}{2} = \frac{kL}{2} \cdot q_{BA} \cdot L = \frac{kL^2}{2} \underline{q_{BA}}$$

$$R_3 = k w_c \cdot L = kL \left( \alpha \Delta t_{lp} - \underline{q_{BC}} \cdot \frac{L}{2} \right)$$

$$R_4 = k (w_B - w_c) \cdot \frac{L}{2} = \frac{kL}{2} \cdot q_{BC} \cdot L = \frac{kL^2}{2} \underline{q_{BC}}$$

Poiché il pendolo non è estensibile, è impossibile esprimere lo sforzo normale in funzione della sua contrazione e, dunque, dell'abbassamento in D della trave.  $N_p$  dunque, è una reazione incognita come incognita risulta la reazione interna della cerniera B.

Per ottenere dapprima le illec.  $q_{BA}$ ,  $q_{BC}$  ed  $N_p$  si scrivono le tre eqg. seguenti:

- eq. gl. alla trazione:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + N_p - 3F - \frac{F}{2} = 0$$



- eq. glob alla rotazione rispetto ad D

$$R_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot L + R_2 \cdot \frac{5}{3} L + R_4 \cdot \frac{L}{6} - 3F \cdot L + F \cdot \frac{L}{2} = 0$$

- eq. del tratto AB alla rot. risp. a D

$$R_1 \cdot \frac{L}{2} + R_2 \cdot \frac{2}{3} L - 3F \cdot \frac{L}{2} = 0$$

~~Il valore di~~

Sostituendo alle  $R_i$  le loro espressioni in funzione di  $Q_{BA}$  e  $Q_{BC}$  si risale alla terza  $\{Q_{BA}, Q_{BC}, N_p\}$ . Infine, il calcolo della reazione  $R_B$  si ottiene dall'eq. di eq. alla traslat. del tratto AB

$$R_1 + R_2 - 3F - R_B = 0$$

Seguono disagg. di rotazione, taglio e mom. flettenti...

NOTA CONCLUSIVA

Si lascia al lettore "volenteroso e diligente" lo SVOLGIMENTO NUMERICO DELL'ESERCIZIO, necessario per una completa comprensione dello stesso!



Italcementi  
Italcementi Group

