

Università degli Studi di Salerno – Facoltà di Ingegneria
Corso di Tecnica delle Costruzioni I – Nuovo Ordinamento
Anno accademico 2008-2009
2^a Prova scritta intracorso - 12/06/2009

Esercizio n. 1 (Punti 10)

Si costruiscano i diagrammi delle Caratteristiche della Sollecitazione (N, V ,M) per la struttura rappresentata nella figura. Si assuma:

$$L=3.0+0.05(C-N) \text{ [m];}$$

$$b_t=b_p=30 \text{ cm}$$

$$F=qL/10$$

$$H=0.5 L$$

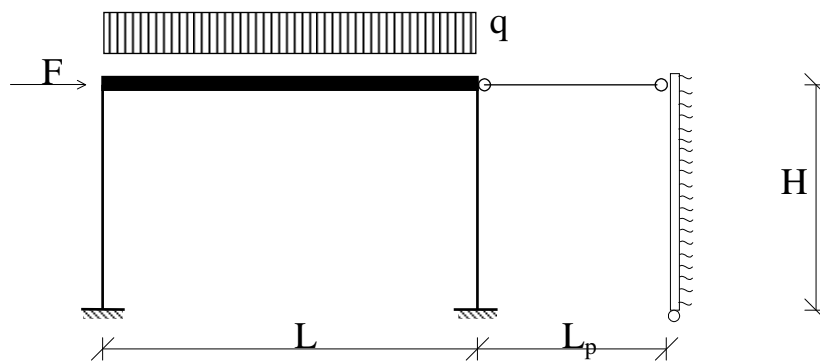
$$h_t=h_p=50+0.05(N-C) \text{ [cm]}$$

$$E_c=28848 \text{ MPa}$$

$$L_p=L/2$$

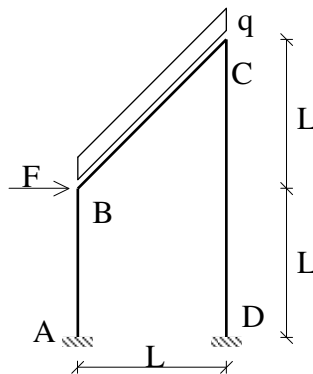
$$q=50.0+ (C-N) \text{ [kN/m]}$$

$$A_p=900 \text{ cm}^2$$



Esercizio n. 2 (Punti 10)

Si analizzi la struttura rappresentata nella figura e se ne traccino i diagrammi del momento flettente e del taglio.



$$L = 300 + 12 N - 8 C \text{ cm;}$$

Sezione asta AB e CD

$$b_t= 30 \text{ cm; } h_t= (40 +N) \text{ cm;}$$

Sezione asta BC

$$b_t= 30 \text{ cm; } h_t= 40 \text{ cm;}$$

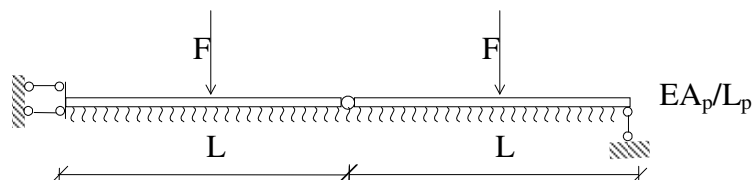
$$F = 200 - 6 N \text{ kN}$$

$$q = 2 F/L$$

$$R_{ck} = 25.0 \text{ MPa}$$

Esercizio n. 3 (Punti 10)

Si calcolino gli spostamenti e costruiscano i diagrammi delle Caratteristiche della Sollecitazione per la trave di fondazione riportata in figura. Si assuma $k_0=0.01 \text{ N/mm}^3$ nonché i valori numerici delle grandezze geometriche e meccaniche dell'esercizio n. 1.



Esercizio n. 1

Es.1.1 Classificazione della struttura.

Al fine di classificare la struttura stabilendo se si tratta di una struttura a nodi fissi o spostabili e di quantificarne, in quest'ultimo caso, il numero, si introduce la *struttura reticolare associata*, ottenuta eliminando il vincolo relativo alle rotazioni (interne ed esterne) dei vincoli (interni ed esterni). Nel caso in specie, tutti gli incastri esterni (in A e D) ed interni (in B e C) saranno "degradati" a cerniere: il grado di labilità della struttura reticolare associata è pari al numero di nodi spostabili.

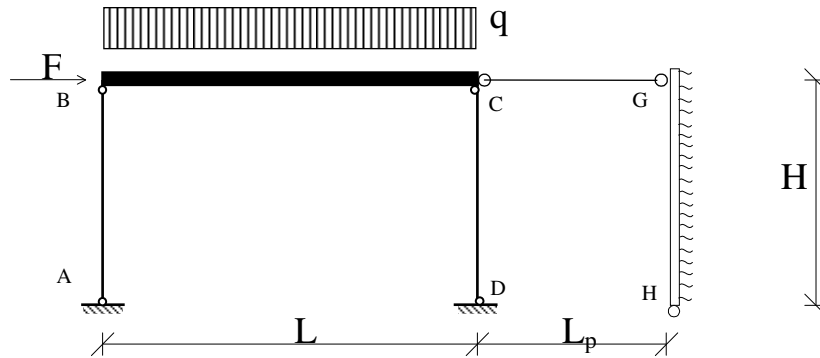


Fig. E1.1: Struttura reticolare associata

La struttura reticolare associata risulta due volte labile essendo

$$3t - 2c = 3 \times 4 - 2 \times 5 = 2$$

ed il generico cinematismo viene descritto tramite le componenti di spostamento δ'_C e δ'_G .

Es.2.2 Definizione degli spostamenti incogniti.

Per la risoluzione del telaio si adotta il Metodo delle Forze, sostituendo al pendolo l'azione X che esso esplica sulla restante struttura. Tale azione X è incognita.

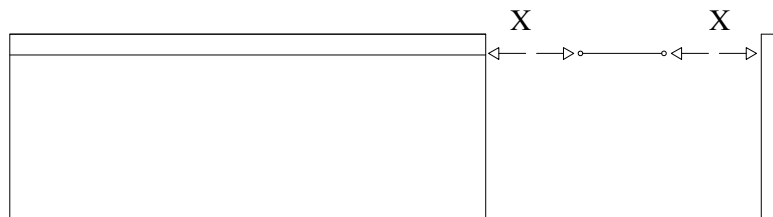


Fig. E1.2: Scomposizione dello schema di calcolo

Assumendo positivi gli spostamenti verso destra, un possibile campo di spostamenti congruente può essere:

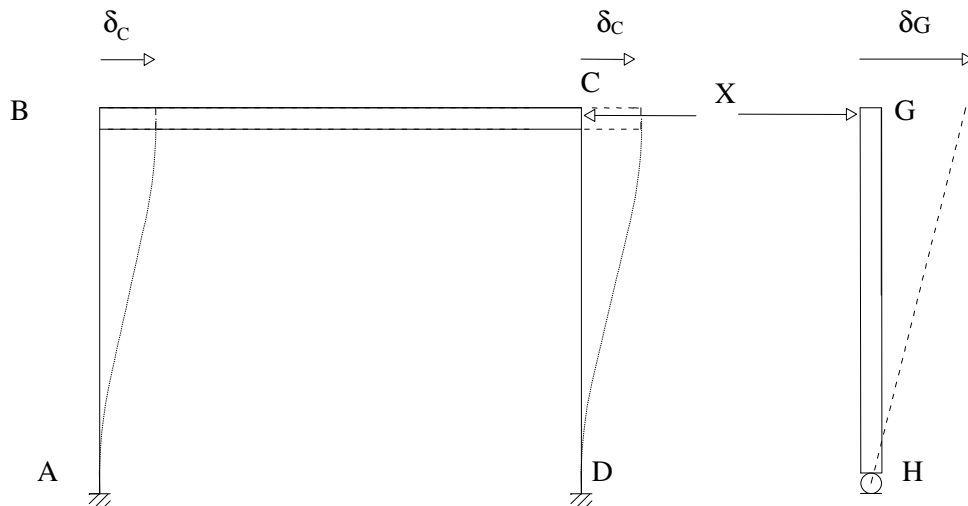


Fig. E1.3: Cinematismo della struttura

Di conseguenza le incognite della struttura sono gli spostamenti: δ_C e δ_G e lo sforzo normale nel pendolo: X .

Es.2.3 Scrittura delle equazioni.

L'equazione di congruenza alla traslazione, facendo riferimento allo schema in Fig. E1.3, sarà:

$$\boxed{-\delta_C + \delta_G = -\frac{XL_p}{EA_p}} \quad (\text{Eq. 1});$$

dove:

δ_C è lo spostamento orizzontale dell'asta BC;

δ_G è l'abbassamento dell'estremo G della trave di fondazione;

X è l'azione incognita del pendolo.

Oltre all'equazione di congruenza (1), per risolvere il problema in esame, sono necessarie altre due equazioni:

- **equilibrio alla traslazione orizzontale dei traversi del telaio;**
- **l'equazione che fornisce l'abbassamento δ_G della fondazione.**

A tal fine si risolvono separatamente le due strutture.

Partendo dal telaio:



Fig. E1.4: Equilibrio del traverso

L'equilibrio alla traslazione del telaio fornisce:

$$\boxed{F + T_{BA} + T_{CD} - X = 0} \quad (\text{Eq. 2});$$

che può essere riscritta come:

$$\boxed{F + k_{BA} \cdot \delta_C + k_{CD} \cdot \delta_C - X = 0} \quad (\text{Eq. 3});$$

Le rigidezze al taglio K_{BA} e K_{CD} valgono rispettivamente:

$$\boxed{k_{BA} = (U_{AB} + U_{BA}) / H} \quad (\text{Eq. 4});$$

$$\boxed{k_{CD} = (U_{CD} + U_{DC}) / H} \quad (\text{Eq. 5});$$

dove:

$$\boxed{U_{CD} = U_{DC} = U_{BA} = U_{AB} = 6EI / H^2} \quad (\text{Eq. 6});$$

e dunque:

$$\boxed{k_{BA} = k_{CD} = 12EI / H^3} \quad (\text{Eq. 7});$$

L'equazione (3) diviene:

$$\boxed{F - 12 \frac{6EI}{H^3} \cdot \delta_C - \frac{12EI}{H^3} \delta_C - X = 0} \Rightarrow \boxed{F - \frac{24EI}{H^3} \cdot \delta_C - X = 0} \quad (\text{Eq. 8});$$

Per la fondazione si ha:

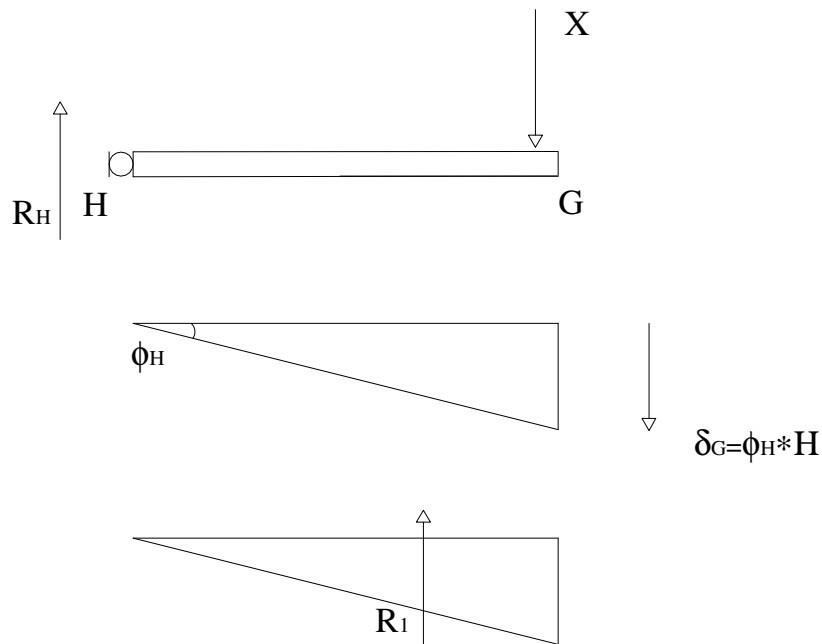


Fig. E1.5: Trave di fondazione

La reazione R_1 del terreno sarà:

$$\boxed{\delta_G = \phi_H \cdot H \Rightarrow \sigma_G = k_0 \cdot \delta_G \Rightarrow p_G = k_0 \cdot B \cdot \delta_G \Rightarrow R_1 = p_G \cdot \frac{H}{2} \Rightarrow R_1 = k_0 \cdot B \cdot \delta_G \cdot \frac{H}{2}} \quad (\text{Eq. 9});$$

Le incognite relative alla fondazione sono la rotazione ϕ_H e la reazione R_H della cerniera.

Poiché al fine della risoluzione della struttura è opportuno avere un'equazione che contenga δ_G , possiamo esprimere quest'ultimo in funzione della rotazione φ_H .

Le equazioni da imporre sono, dunque, l'equilibrio alla traslazione globale e l'equilibrio alla rotazione intorno ad H:

$$\begin{cases} X - R_1 - R_H = 0 \\ X \cdot H - R_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot H = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_H = X - R_1 \\ R_1 = X \cdot \frac{3}{2} \end{cases}$$

Sostituendo (Eq 9) nella seconda delle precedenti si ha:

$$\boxed{k_0 \cdot B \cdot \delta_G \cdot \frac{H}{2} = X \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \delta_G = \frac{3X}{H \cdot k_0 \cdot B}} \quad (\text{Eq. 10});$$

che fornisce la terza equazione necessaria alla risoluzione del problema.

Il sistema di equazioni cercato è:

$$\begin{cases} \delta_G - \delta_c = -\frac{X \cdot L_p}{EA_p} & (\text{Eq.1}) \\ F - 24 \frac{EI}{H^3} \delta_c - X = 0 & (\text{Eq.8}) \\ \delta_G = \frac{3 \cdot X}{H \cdot k_0 \cdot B} & (\text{Eq.10}) \end{cases}$$

Sostituendo le prime due equazioni nell'ultima si ottiene lo sforzo normale nel pendolo:

$$\boxed{\frac{3X}{H \cdot k_0 \cdot B} - \frac{(F - X)H^3}{24EI} = -\frac{XL_p}{EA_p}} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{3}{H \cdot k_0 \cdot B} + \frac{H^3}{24EI} + \frac{L_p}{EA_p} \right) \cdot X = \frac{F \cdot H^3}{24EI}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \frac{F \cdot H^3}{24EI} \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{H \cdot k_0 \cdot B} + \frac{H^3}{24EI} + \frac{L_p}{EA_p} \right)}} \quad (\text{Eq. 11});$$

Definizione delle incognite

```
Incognite = {deltaC, deltaG};
```

Espressione dei tagli

```
TBA = 12 EI / H^3 deltaC;
TCD = 12 EI / H^3 deltaC;
```

Espressione della reazione del terreno

```
R1 = k0 B deltaG H / 2;
```

Equazioni di equilibrio

```
Eq1 = F - TBA - TCD - X;
Eq2 = R1 2 / 3 H - X H;
```

Espressione della reazione del pendolo

```
X = EAp / Lp (deltaC - deltaG);
```

Calcolo degli spostamenti incogniti

```
Sistema = {Eq1, Eq2};
Sol = Solve[Sistema == 0, Incognite] // Flatten
{deltaC -> (F H^3 (3 EAp + B H k0 Lp)) / (72 EAp EI + B EAp H^4 k0 + 24 B EI H k0 Lp),
 deltaG -> (3 EAp F H^3) / (72 EAp EI + B EAp H^4 k0 + 24 B EI H k0 Lp)}
```

Valori numerici

```
L = 3000;  
H = 0.5 L;  
Lp = L / 2;  
bp = 300;  
hp = 500;  
MomI = bp hp ^ 3 / 12;  
Ec = 28848;  
EI = Ec MomI;  
k0 = 0.01;  
q = 50;  
F = q L / 10;  
B = 1000;  
Ap = 90000;  
EAp = Ec Ap;
```

```
Sol
```

```
{deltaC → 0.0232179, deltaG → 0.0231511}
```

```
deltaCSol = deltaC /. Sol
```

```
deltaGSol = deltaG /. Sol
```

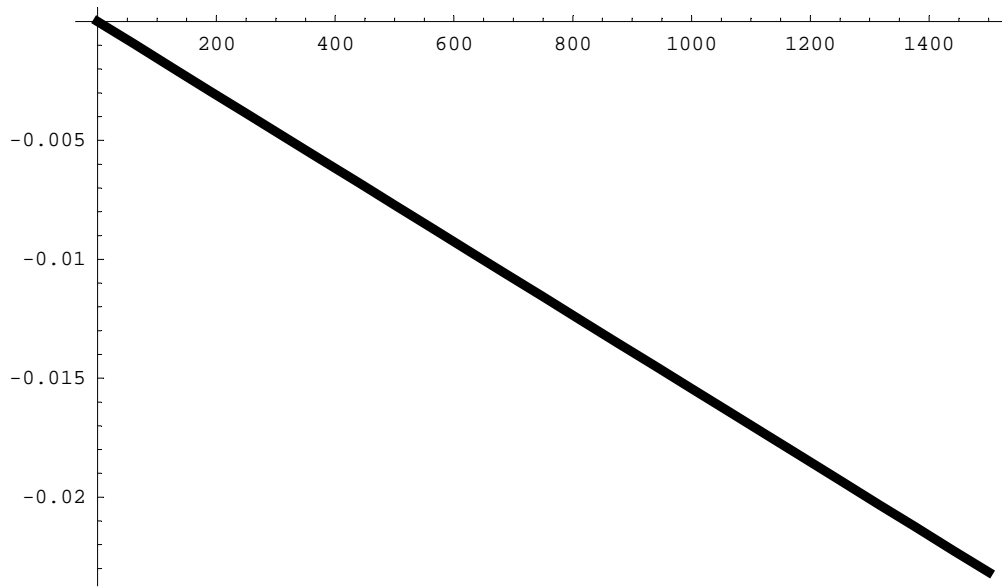
```
0.0232179
```

```
0.0231511
```

Campo di spostamenti sulla fondazione

```
FunctionW = deltaGSol z / H;
```

```
Plot[-FunctionW, {z, 0, H}, PlotStyle -> {Thickness[.01]}
```



- Graphics -

Diagramma del taglio sulla fondazione

```
XSol = X /. Sol
```

```
115.755
```

```
RH = (R1 /. Sol) - XSol
```

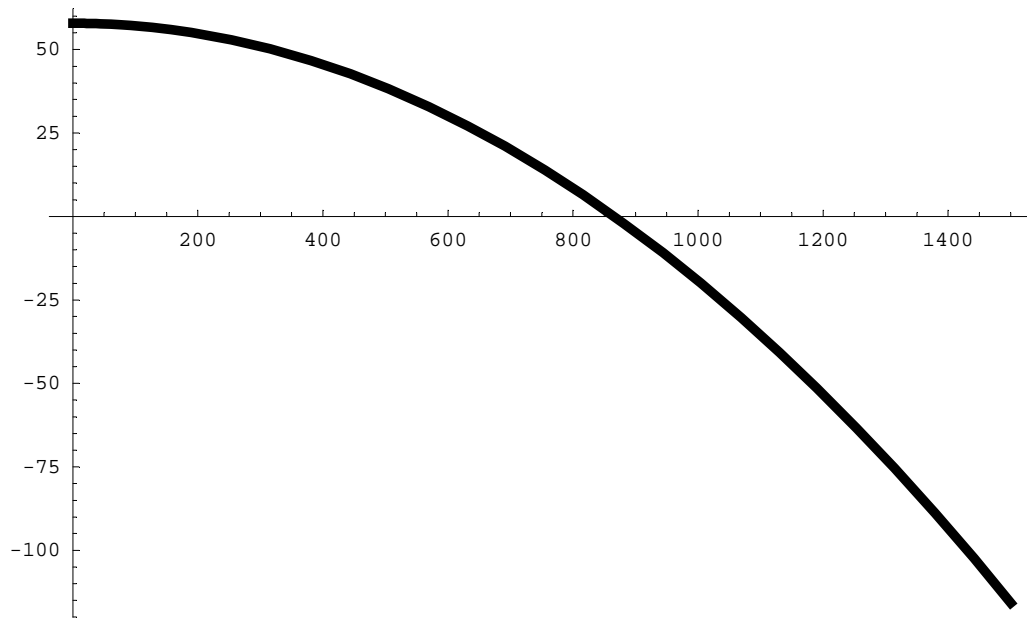
```
57.8776
```

```
Taglio = RH - Integrate[k0 B FunctionW, z]
```

```
57.8776 - 0.0000771702 z2
```



```
Plot[Taglio, {z, 0, H}, PlotStyle -> {Thickness[.01]}]
```



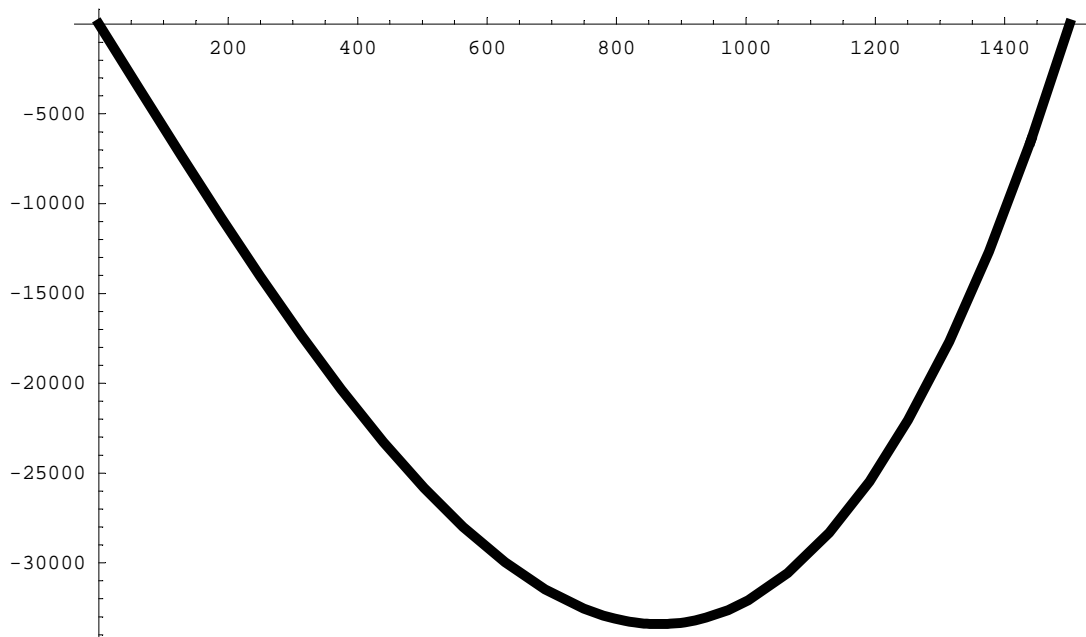
- Graphics -

Diagramma del momento flettente sulla fondazione

```
MomentoFlettente = Integrate[Taglio, z]
```

$$57.8776 z - 0.0000257234 z^3$$

```
Plot[-MomentoFlettente, {z, 0, H}, PlotStyle -> {Thickness[.01]}]
```



- Graphics -

Esercizio n. 2

Es.2.1 Classificazione della struttura.

Al fine di classificare la struttura al fine di stabilire se si tratta di una struttura a nodi fissi o spostabili e di quantificarne, in quest'ultimo caso, il numero, si introduce la *struttura reticolare associata*, ottenuta eliminando il vincolo relativo alle rotazioni (interne ed esterne) dei vincoli (interni ed esterni). Nel caso in specie, tutti gli incastri esterni (in A e D) ed interni (in B e C) saranno "degradati" a cerniere: il grado di labilità della struttura reticolare associata è pari al numero di nodi spostabili.

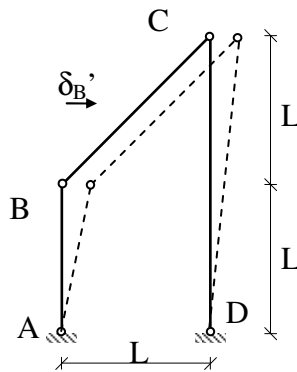


Fig. E2.1: Struttura reticolare associata

La struttura reticolare associata risulta una volta labile essendo

$$3t-2c=3 \times 3-2 \times 4=1$$

e potendo descrivere il generico cinematismo tramite la sola componente di spostamento δ'_B .

Es.2.2 Definizione degli spostamenti incogniti.

Di conseguenza la risposta della struttura in oggetto può essere analizzata tramite il *Metodo degli Spostamenti* assumendo come incognite le due rotazioni dei nodi interni B e C e la componente orizzontale δ_B dello spostamento del nodo B:

$$\mathbf{s} = \{\varphi_B, \varphi_C, \delta_B\}.$$

Es.2.3 Scrittura delle equazioni di equilibrio.

Le tre equazioni di equilibrio necessarie per trovare l'unica soluzione equilibrata nell'insieme delle ∞^3 soluzioni descritte dal generico valore assunto dal vettore \mathbf{s} , si ottengono come segue:

- **equilibrio alla rotazione del nodo B:**

$$\boxed{M_{BA} + M_{BC} = 0} \quad (\text{Eq. 1});$$

- **equilibrio alla rotazione del nodo C:**

$$\boxed{M_{CB} + M_{CD} = 0} \quad (\text{Eq. 2});$$

- **equilibrio globale della struttura:**

trattandosi di una struttura a maglie di forma "generica" si dovrebbe far ricorso al Principio dei Lavori virtuali per imporre che le forze esterne e le coppie nodali eventualmente applicate alla struttura reticolare associata abbiano risultante nulla:

$$(M_{AB} + M_{BA}) \cdot \frac{\delta'_{AB}}{L_{AB}} + (M_{BC} + M_{CB}) \cdot \frac{\delta'_{BC}}{L_{BC}} + (M_{CD} + M_{DC}) \cdot \frac{\delta'_{CD}}{L_{CD}} + F \cdot \delta'_B = 0$$

Le relazioni esistenti tra spostamenti (virtuali) d'asta e spostamento virtuale imposto al nodo B possono riassumersi nella seguente tabella, derivando dal fatto che il campo di spostamenti descritto dalla struttura reticolare associata (Fig. E2.1) è un campo rigido-infinitesimo:

	δ'_B
δ'_{AB}	1
δ'_{BC}	0
δ'_{CD}	1

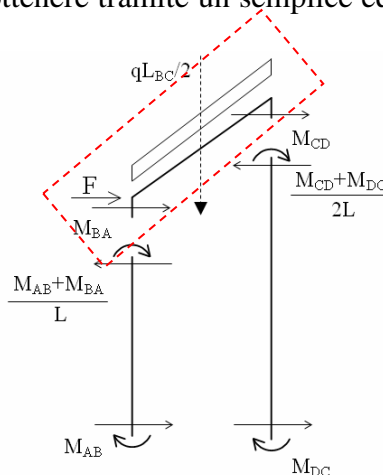
L'equazione precedente può, dunque, semplificarsi come segue introducendo tali relazioni e mettendo in evidenza lo spostamento virtuale (di valore arbitrario) δ'_B :

$$\left(\frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{2L} + F \right) \cdot \delta'_B = 0.$$

Potendo assumere δ'_B valore arbitrario, il prodotto al primo membro dell'equazione precedente si annulla solo se il primo dei due fattori è nullo:

$$\boxed{\frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{2L} + F = 0} \quad (\text{Eq. 3}).$$

Si fa notare, peraltro, che, nel caso in specie (essendo entrambi verticali i ritti AB e CD) la terza equazione si sarebbe pure potuta ottenere tramite un semplice equilibrio alla traslazione orizzontale del traverso BC:



In definitiva, scrivendo un'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione orizzontale sul traverso BC si ottiene esattamente la medesima relazione:

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{2L} + F = 0 .$$

Es.2.5 Esplicitazione del legame tra momenti nodali e parametri di spostamento.

Al fine di rendere esplicite le relazioni è necessario esprimere i momenti nodali in funzione degli spostamenti incogniti:

- asta AB:

$$M_{AB} = V_{AB} \cdot \varphi_B - U_{AB} \cdot \delta_{AB} = V_{AB} \cdot \varphi_B - U_{AB} \cdot \delta_B ;$$

$$M_{BA} = W_{BA} \cdot \varphi_B - U_{BA} \cdot \delta_{AB} = W_{BA} \cdot \varphi_B - U_{BA} \cdot \delta_B ;$$

- asta BC:

$$M_{BC} = W_{BC} \cdot \varphi_B + V_{BC} \cdot \varphi_C - U_{BC} \cdot \delta_{BC} + \mu_{BC} = W_{BC} \cdot \varphi_B + V_{BC} \cdot \varphi_C + \mu_{BC} ;$$

$$M_{CB} = W_{CB} \cdot \varphi_C + V_{CB} \cdot \varphi_B - U_{CB} \cdot \delta_{BC} + \mu_{CB} = W_{CB} \cdot \varphi_C + V_{CB} \cdot \varphi_C + \mu_{CB} ;$$

- asta CD:

$$M_{DC} = V_{DC} \cdot \varphi_C - U_{DC} \cdot \delta_{CD} = V_{DC} \cdot \varphi_C - U_{DC} \cdot \delta_B ;$$

$$M_{CD} = W_{CD} \cdot \varphi_C - U_{CD} \cdot \delta_{CD} = W_{CD} \cdot \varphi_C - U_{CD} \cdot \delta_B .$$

Es.2.6 Scrittura delle equazioni in forma esplicita.

Le espressioni dei momenti nodali riportate nel paragrafo Es.2.5 possono essere introdotte nelle tre equazioni di equilibrio ricavate nel paragrafo Es.2.4 e, dopo le opportune semplificazioni è possibile ottenere le tre seguenti equazioni in termini di spostamenti:

$$\begin{cases} (W_{BA} + W_{BC}) \cdot \varphi_B + V_{BC} \cdot \varphi_B - U_{BA} \cdot \delta_B = -\mu_{BC} \\ V_{CB} \cdot \varphi_B + (W_{CB} + W_{CD}) \cdot \varphi_C - U_{CD} \cdot \delta_B = -\mu_{CB} \\ -U_{BA} \cdot \varphi_B - U_{CD} \cdot \varphi_C + \left[\frac{U_{AB} + U_{BA}}{L} + \frac{U_{CD} + U_{DC}}{2L} \right] \cdot \delta_B = F \end{cases}$$

ovvero, in forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} W_{BA} + W_{BC} & V_{BC} & -U_{BA} \\ V_{CB} & W_{CB} + W_{CD} & -U_{CD} \\ -U_{BA} & -U_{CD} & \frac{U_{AB} + U_{BA}}{L} + \frac{U_{CD} + U_{DC}}{2L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \\ \delta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_{BC} \\ -\mu_{CB} \\ F \end{bmatrix}$$

Es.2.7 Definizione delle rigidezze e dei momenti di incastro perfetto.

Sulla base delle grandezze dimensionali riportate nella traccia per le sezioni trasversali dei vari elementi, ed assumendo il seguente valore per il Modulo di Young di un calcestruzzo C20/25:

$$E_c = 22000 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.3} = 22000 \cdot \left(\frac{20+8}{10} \right)^{0.3} = 29962 \text{ MPa} ,$$

è possibile determinare i valori numerici delle rigidezze delle varie aste secondo le espressioni riportate nel seguito:

- asta AB:

$$W_{BA} = \frac{4E_c I_{AB}}{L_{AB}} = \frac{4 \cdot 29962 \cdot \frac{300 \cdot 440^3}{12}}{2680} = 9.523 \cdot 10^{10} \text{ Nmm} ;$$

$$V_{AB} = V_{BA} = \frac{2EI_{AB}}{L_{AB}} = \frac{2 \cdot 29962 \cdot \frac{300 \cdot 440^3}{12}}{2680} = 4.762 \cdot 10^{10} \text{ Nmm};$$

$$U_{AB} = U_{BA} = \frac{6EI_{AB}}{L_{AB}^2} = \frac{6 \cdot 29962 \cdot \frac{300 \cdot 440^3}{12}}{2680^2} = 5.330 \cdot 10^7 \text{ N};$$

- asta BC:

$$W_{BC} = W_{CB} = \frac{4EI_{BC}}{L_{BC}} = \frac{4 \cdot 29962 \cdot \frac{300 \cdot 400^3}{12}}{3790,1} = 5.059 \cdot 10^{10} \text{ Nmm};$$

$$V_{BC} = V_{CB} = \frac{2EI_{BC}}{L_{BC}} = \frac{2 \cdot 29962 \cdot \frac{300 \cdot 400^3}{12}}{3790,1} = 2.530 \cdot 10^{10} \text{ Nmm};$$

$$U_{BC} = U_{CB} = \frac{6EI_{BC}}{L_{BC}^2} = \frac{2 \cdot 29962 \cdot \frac{300 \cdot 400^3}{12}}{(3790,1)^2} = 2.002 \cdot 10^7 \text{ N};$$

$$\mu_{BC} = -\mu_{CB} = -\frac{q_{\perp} \cdot L_{BC}^2}{12} = -\frac{65,69 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (3790,1)^2}{12} = 5.559 \cdot 10^7 \text{ Nmm};$$

Nel calcolo del momento di incastro perfetto si è assunto, secondo la traccia un carico q pari a:

$$q = \frac{F}{L} = \frac{176}{2,680} = 65,67 \text{ kN/m} = 65,67 \text{ N/mm}$$

le cui componenti normale e tangenziale rispetto all'asse dell'asta BC hanno il seguente valore:

$$q_{\perp} = q_{//} = q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 65,67 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 46,44 \text{ N/mm}$$

- asta CD:

$$W_{CD} = \frac{4EI_{CD}}{L_{CD}} = \frac{4 \cdot 29962 \cdot \frac{300 \cdot 440^3}{12}}{2680 \cdot 2} = 4.762 \cdot 10^{10} \text{ Nmm};$$

$$V_{CD} = V_{DC} = \frac{2EI_{CD}}{L_{CD}} = \frac{2 \cdot 29962 \cdot \frac{300 \cdot 440^3}{12}}{2680 \cdot 2} = 2.381 \cdot 10^{10} \text{ Nmm};$$

$$U_{CD} = U_{DC} = \frac{6EI_{CD}}{L_{CD}^2} = \frac{6 \cdot 29962 \cdot \frac{300 \cdot 440^3}{12}}{(2680 \cdot 2)^2} = 1.333 \cdot 10^7 \text{ N};$$

Es.2.8 Calcolo degli spostamenti nodali.

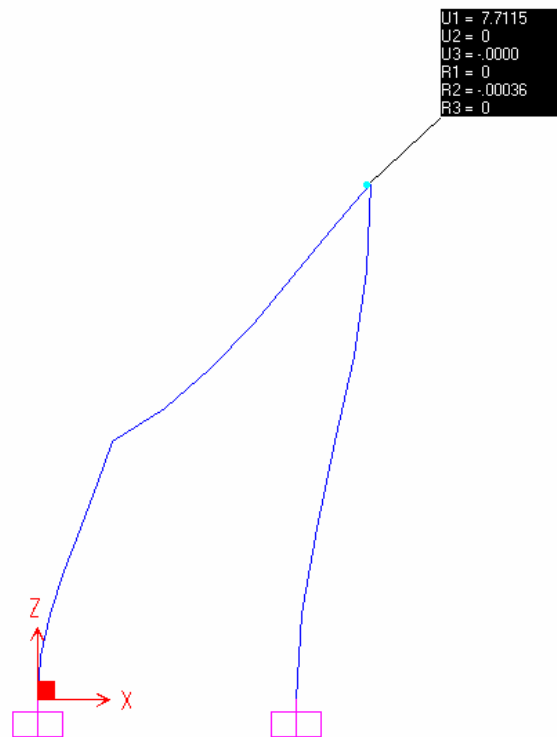
Per determinare il valore degli spostamenti nodali è necessario risolvere il sistema di tre equazioni scritto nel paragrafo Es.2.6.

Sostituendo i valori numerici delle rigidezze si ottiene la seguente espressione del sistema di equazioni scritto nel paragrafo Es.2.6:

$$\begin{bmatrix} 1,458E+11 & 2,530E+10 & -5,330E+07 \\ 2,530E+10 & 9,821E+10 & -1,333E+07 \\ -5,330E+07 & -1,333E+07 & 4,475E+04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \\ \delta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,559E+07 \\ -5,559E+07 \\ 1,760E+05 \end{bmatrix}$$

Invertendo la matrice è possibile risolvere il sistema e trovare i seguenti valori degli spostamenti nodali:

$$\begin{bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \\ \delta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,003262 \\ -0,000360 \\ 7,711518 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{rad} \\ \text{rad} \\ \text{mm} \end{bmatrix}$$



Configurazione deformata

Es.2.9 Calcolo dei momenti nodali.

Inserendo i valori numerici calcolati nel paragrafo precedente all'interno delle espressioni del paragrafo Es.2.5 si determinano i seguenti valori nodali del momento (ai valori positivi corrispondono coppie nodali orarie secondo la convenzione assunta):

$$\begin{aligned} M_{AB} &= -2,557E+08 \text{ Nmm} &= & -255,70 \text{ kNm} \\ M_{BA} &= -1,004E+08 \text{ Nmm} &= & -100,36 \text{ kNm} \\ M_{BC} &= 1,004E+08 \text{ Nmm} &= & 100,36 \text{ kNm} \\ M_{CB} &= 1,199E+08 \text{ Nmm} &= & 119,90 \text{ kNm} \\ M_{CD} &= -1,199E+08 \text{ Nmm} &= & -119,90 \text{ kNm} \\ M_{DC} &= -1,113E+08 \text{ Nmm} &= & -111,33 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Es.2.10 Determinazione dei valori delle sollecitazioni taglianti.

Il valore delle sollecitazioni da taglio sulla generica asta ij può derivarsi dalle coppie modali desunte ai suoi estremi e dal carico eventualmente applicato su di esse:

$$T_{ij} = \frac{q_{ij}L_{ij}}{2} - \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} \qquad T_{ji} = -\frac{q_{ij}L_{ij}}{2} - \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} .$$

I valori numerici che si ottengono sulla base dei dati di partenza e dei risultati in termini di momenti nodali sono elencati nel seguito:

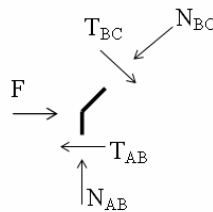
$T_{AB} =$	132,86	kN
$T_{BA} =$	132,86	kN
$T_{BC} =$	29,88	kN
$T_{CB} =$	-146,12	kN
$T_{CD} =$	43,14	kN
$T_{DC} =$	43,14	kN

Si osserva che la somma dei tagli nei ritti ($T_{BA} + T_{CD}$) risulta uguale alla forza F applicata nel punto B, come peraltro stabilito dall'equazione n.3 riportata nel paragrafo Es.2.3.

Es.2.10 Determinazione dei valori degli sforzi normali.

Gli sforzi normali possono determinarsi dalla condizione di equilibrio alla traslazione dei nodi:

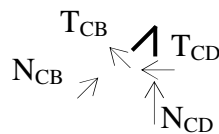
- Nodo B:



$$F - T_{BA} + T_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 ;$$

$$N_{BA} - T_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

- Nodo C:



$$N_{CB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + T_{CB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{CD} = 0 ;$$

$$N_{CB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - T_{CB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - T_{CD} = 0$$

I risultati numerici ottenuti risolvendo le equazioni di sopra sono sinteticamente riportati nel seguito:

$$N_{AB} = 85,40 \text{ kN}$$

$$N_{BC} = 90,89 \text{ kN}$$

$$N_{CB} = -85,11 \text{ kN}$$

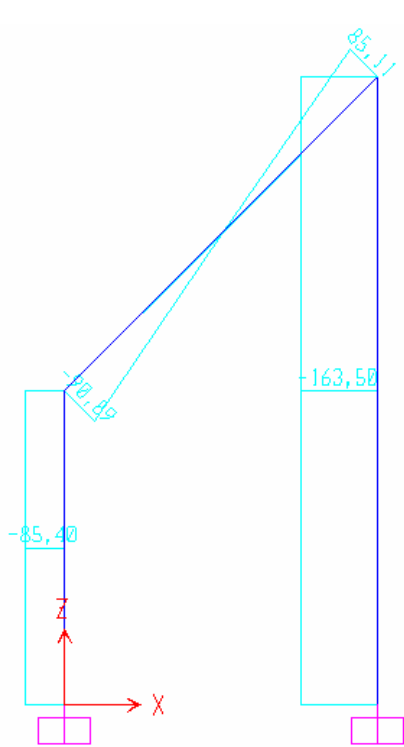
$$N_{CD} = 163,50 \text{ kN}$$

Si osserva che lo sforzo normale varia linearmente lungo l'asta BC per effetto della presenza della componente assiale del carico ripartito; risulta, peraltro,

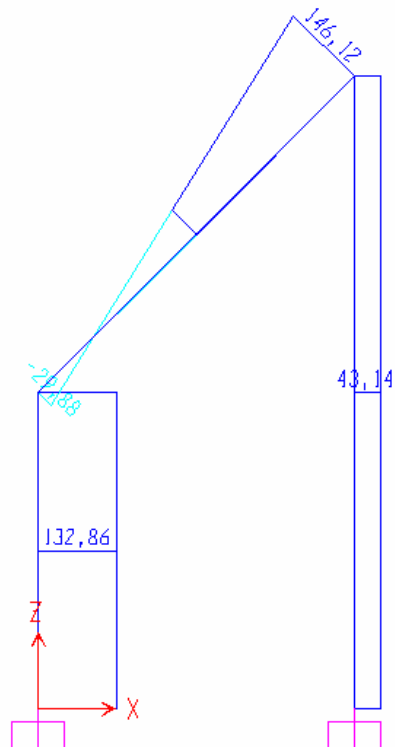
$$N_{BC} - N_{CB} - q_{//} \cdot L_{BC} = 90,89 + 85,11 - 46,44 \cdot 3790,1 = 0$$

e, dunque, l'equilibrio alla traslazione dell'asta BC lungo il suo asse è rispettato.

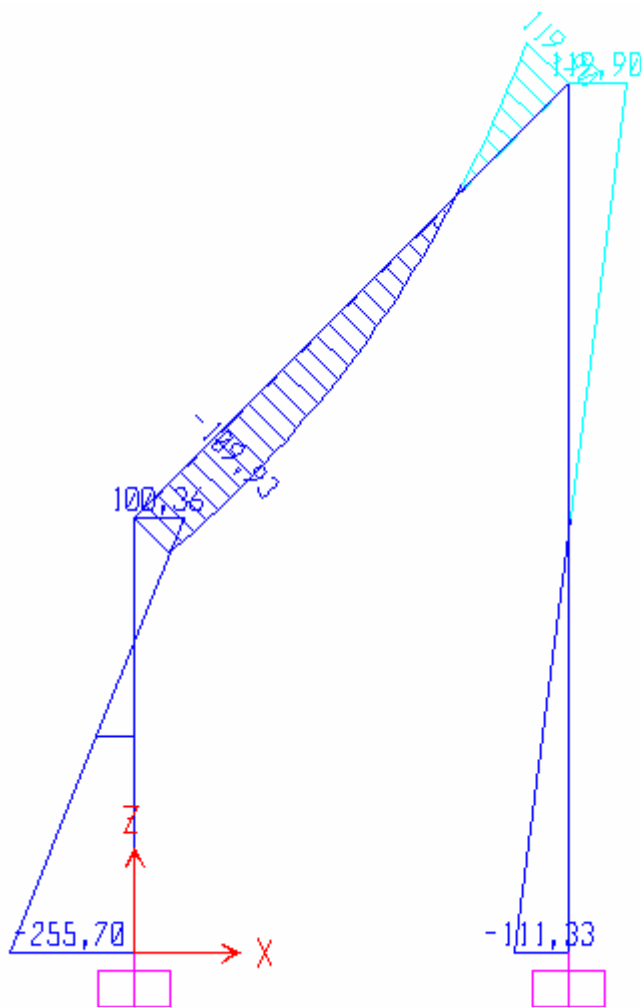
Es.2.11 Diagrammi delle Caratteristiche della Sollecitazione.



Sforzo Normale



Taglio



Momento Flettente

Esercizio n. 3

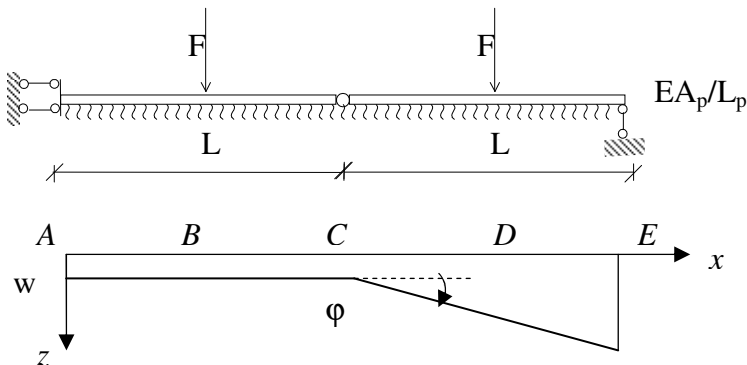
Es.3.1 Dati.

$$L = 3.0 \text{ m}; F = qL/10 = 15 \text{ kN} \quad (q = 50.0 \text{ kN/m}).$$

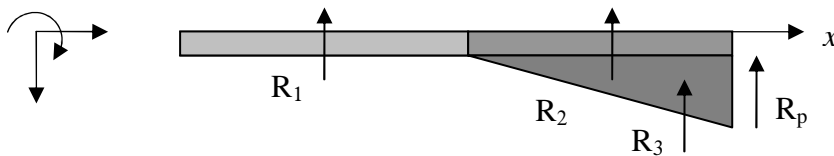
$$E_c = 29962 \text{ MPa}; A_p = 900 \text{ cm}^2; L_p = L/2 = 1.5 \text{ m}; k_0 = 0.01 \text{ N/mm}^3.$$

Es.3.2 Incognite.

Compatibilmente con i vincoli si traccia un possibile cinematismo della struttura fondale:



Nell'ipotesi di trave rigida su suolo elastico, schematizzato con una serie di molle elastiche indipendenti, si ottiene una distribuzione di tensioni nel terreno proporzionale al cinematismo individuato.



$$R_1 = \sigma_{t,R} \cdot b \cdot L = k_0 b \cdot z_A \cdot L = (k_0 b) L \cdot w;$$

$$R_2 = \sigma_{t,R} \cdot b \cdot L = k_0 b \cdot z_C \cdot L = (k_0 b) L \cdot w;$$

$$R_3 = \sigma_{t,T} \cdot b \cdot L / 2 = k_0 (z_E - z_C) \cdot bL / 2 = (k_0 b) \cdot (L / 2) \cdot \varphi \cdot L = (k_0 b) (L^2 / 2) \cdot \varphi.$$

$$R_p = K \cdot z_E = \frac{EA_p}{L_p} \cdot (w + \varphi \cdot x_E) = \frac{EA_p}{L_p} \cdot (w + \varphi \cdot L).$$

Da cui si evince la presenza delle sole due incognite cinematiche ($w; \varphi$).

Nota bene: si prende in considerazione la reazione del pendolo, perché dalla rigidità di questo dipende la distribuzione delle tensioni nel terreno.

Es.3.2 Equazioni di Equilibrio per il calcolo delle incognite cinematiche.

Visto il numero delle incognite, si passa a scrivere due relazioni di equilibrio statico. In particolare una alla traslazione ed una alla rotazione con polo in A.

Eq. alla Traslazione: $F - R_1 + F - R_2 - R_3 - R_p = 0;$

Eq. alla Rotazione del tratto BC (polo B): $F \cdot \frac{L}{2} - R_2 \cdot \frac{L}{2} - \frac{2}{3} \cdot R_3 \cdot L - R_p \cdot L = 0.$

Il valore delle incognite cinematiche si ottiene dalla soluzione del seguente sistema di equazioni e sostituendo le espressioni di R_i ed R_p in funzione degli spostamenti incogniti:

$$\begin{cases} F - R_1 + F - R_2 - R_3 - R_p = 0 \\ F \cdot \frac{L}{2} - R_2 \cdot \frac{L}{2} - \frac{2}{3} \cdot R_3 \cdot L - R_p \cdot L = 0 \end{cases}.$$

Es.3.3 Ulteriori equazioni di equilibrio per il calcolo delle reazioni vincolari.

- calcolo della reazione M_A del doppio pendolo (equilibrio globale alla rotazione):

$$M_A + F \cdot \frac{L}{2} + \frac{3}{2} \cdot F \cdot L - R_1 \cdot \frac{L}{2} - \frac{3}{2} \cdot R_2 \cdot L - \frac{5}{3} \cdot R_3 \cdot L - R_p \cdot 2L = 0 ;$$

- calcolo della reazione R_B del della cerniera interna (equilibrio alla traslazione del tratto BC):

$$R_B - F + R_2 + R_3 + R_p = 0 .$$

■ Scelta delle incognite

```
In[6]:= Incognite = {w, Fi};
```

■ Espressione delle risultanti delle reazioni del terreno

```
In[1]:= R1 = k L w;
        R2 = k L w;
        R3 = k L^2 / 2 Fi;
```

```
In[4]:= Rp = EAplp (w + Fi L);
```

■ Scrittura delle equazioni di equilibrio

```
In[9]:= Eq1 = 2 F - (R1 + R2 + R3 + Rp);
        Eq2 = F L / 2 - R2 L / 2 - R3 2 / 3 L - Rp L;
```

■ Calcolo degli spostamenti

```
In[12]:= Sistema = {Eq1, Eq2};
```

```
In[13]:= Sol = Solve[Sistema == 0, Incognite] // Flatten
```

```
Out[13]= {w -> -\frac{-18 EAplp F - 5 F k L}{L (16 EAplp k + 5 k^2 L)}, Fi -> -\frac{18 EAplp F}{L^2 (16 EAplp k + 5 k^2 L)}}
```

```
In[46]:= wSol = w /. Sol;
        FiSol = Fi /. Sol;
```

■ Espressione delle reazioni del terreno e del pendolo

```
In[18]:= R1Sol = R1 /. Sol;
        R2Sol = R2 /. Sol;
        R3Sol = R3 /. Sol;
        RpSol = Rp /. Sol;
```

■ Calcolo delle reazioni dei vincoli

```
In[22]:= Eq3 = MA + F L / 2 + 3 / 2 F L - R1Sol L / 2 - 3 / 2 R2Sol L - 5 / 3 R3Sol L - 2 RpSol L;
        Eq4 = VB + R2Sol + R3Sol + RpSol - F;
```

```
In[25]:= SolMA = Solve[Eq3 == 0, MA] // Flatten
         SolVB = Solve[Eq4 == 0, VB] // Flatten
```

```
Out[25]= {MA -> - $\frac{EA_p L_p F L}{16 EA_p L_p + 5 k L}$ }
```

```
Out[26]= {VB ->  $\frac{2 EA_p L_p F}{16 EA_p L_p + 5 k L}$ }
```

```
In[40]:= MASol = MA /. SolMA;
         VBSol = VB /. SolVB;
```

■ Valori Numerici

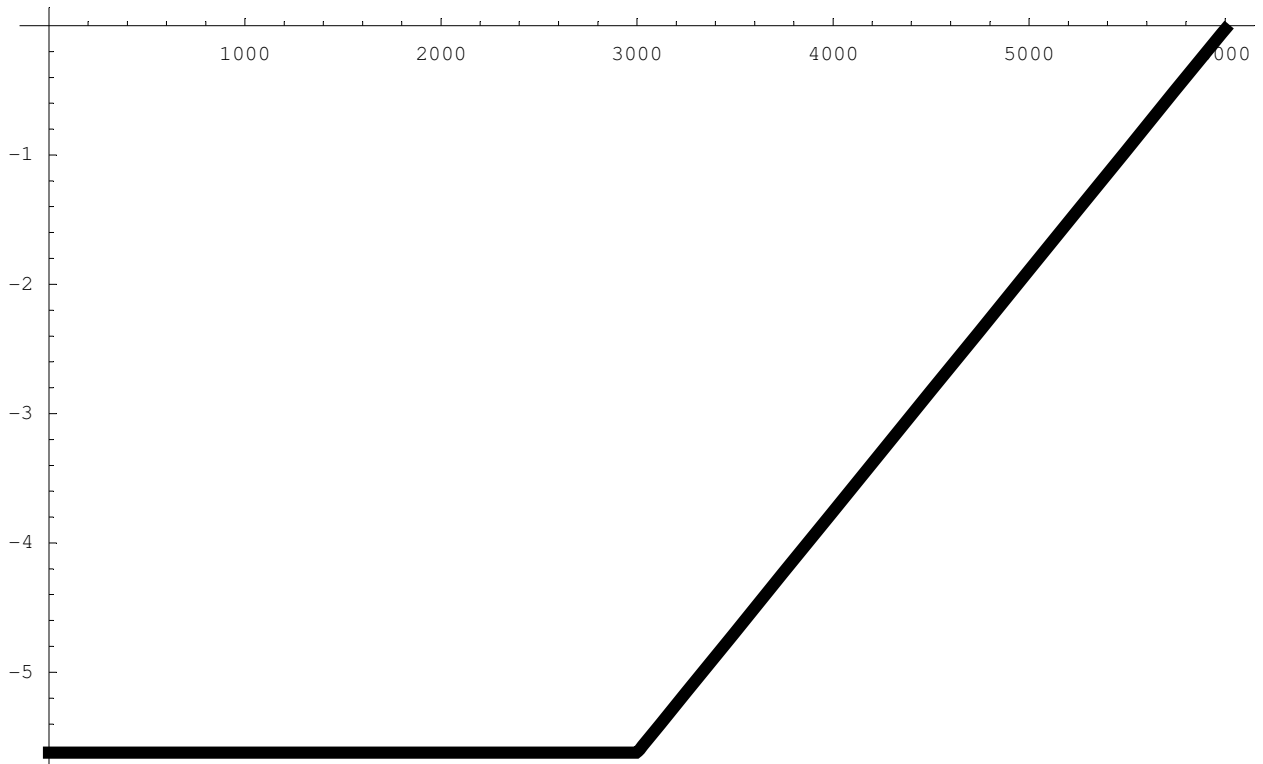
```
In[59]:= L = 3000;
         q = 50;
         F = q L;
         b = 1000;
         k0 = 0.01;
         k = k0 b;
         Ap = 90000;
         Ec = 29962;
         Lp = L / 2;
         EA_p L_p = Ec Ap / L_p;
```

■ Campo di Spostamenti

```
FunctionW = If[z < L, wSol, wSol + FiSol (z - L)];
```

```
Out[52]= If[z < 3000, wSol, wSol + FiSol (z - L)]
```

```
In[104]:= Plot[-FunctionW, {z, 0, 2 L}, PlotStyle -> {Thickness[.01]}
```



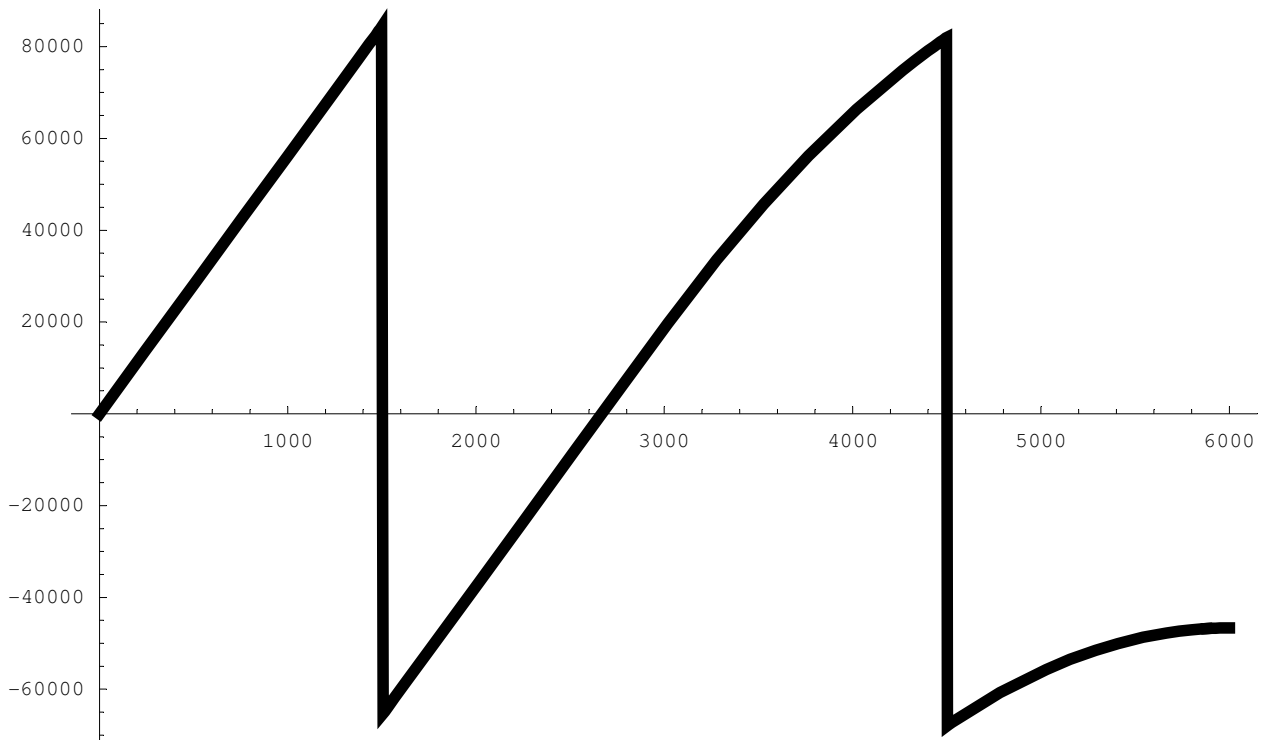
```
Out[104]= - Graphics -
```

■ Diagramma del Taglio

```
In[89]:= Taglio = If[z < L, k wSol z, k wSol L + (k (wSol + (wSol + FiSol (z - L))) / 2) (z - L)] +
           If[z < L/2, 0, If[z < 3 L/2, -F, -2 F]]
```

```
Out[89]= If[z < 1500, 0, If[z <  $\frac{3L}{2}$ , -F, -2 F]] +
          If[z < 3000, k wSol z, k wSol L +  $\frac{1}{2}$  (k (wSol + (wSol + FiSol (z - L)))) (z - L)]
```

```
In[101]:= Plot[Taglio, {z, 0, 2 L}, PlotStyle -> {Thickness[.01]}]
```



```
Out[101]= - Graphics -
```

```
In[103]:= Taglio /. z -> 2 L
```

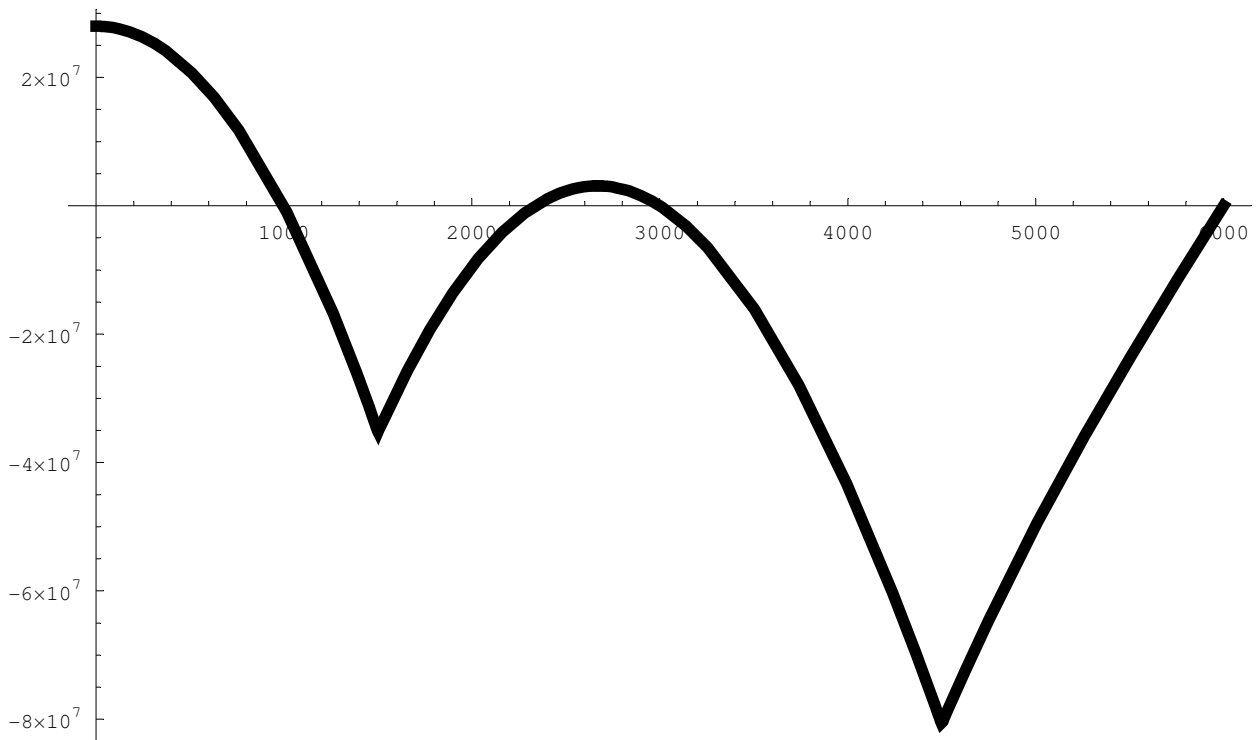
```
Out[103]= -46631.8
```

■ Diagramma del Momento Flettente

```
In[97]:= MomentoFlettente = MASol + If[z < L, k wSol z^2 / 2,
      k wSol L (z - L / 2) + k wSol (z - L) (z - L) / 2 + k FiSol (z - L)^3 / 6] +
      If[z < L / 2, 0, If[z < 3 L / 2, -F (z - L / 2), -F (z - L / 2) - F (z - 3 L / 2)]]
```

```
Out[97]= -2.79791 × 107 + If[z < 1500, 0, If[z <  $\frac{3L}{2}$ , -F (z -  $\frac{L}{2}$ ), -F (z -  $\frac{L}{2}$ ) - F (z -  $\frac{3L}{2}$ ))] +
      If[z < 3000,  $\frac{1}{2}$  k wSol z2, k wSol L (z -  $\frac{L}{2}$ ) +  $\frac{1}{2}$  k wSol (z - L) (z - L) +  $\frac{1}{6}$  k FiSol (z - L)3]
```

```
In[102]:= Plot[-MomentoFlettente, {z, 0, 2 L}, PlotStyle -> {Thickness[.01]}
```



```
Out[102]= - Graphics -
```