

1. INTRODUZIONE.

1.1. Inquadramento della problematica.

Le strutture realizzate con il sistema misto acciaio-calcestruzzo si affiancano a quelle in acciaio ed in cemento armato rappresentando, a seconda dei diversi elementi strutturali, un'evoluzione delle prime o una valida alternativa alle seconde.

Gli elementi strutturali che possono essere realizzati secondo il sistema in questione sono essenzialmente:

- *solette composte* da una lamiera grecata su cui si effettua un getto di calcestruzzo armato superiormente con una rete metallica (Figura 1.1a);
- *colonne composte* da uno o più profilati (tipicamente del tipo HE) completamente inseriti in un getto di calcestruzzo (ne esistono anche altri tipi realizzati riempiendo un profilato a sezione chiusa con un getto di calcestruzzo) (Figura 1.1b);
- *travi composte* da un *profilato metallico* e da una *soletta* in calcestruzzo armato (eventualmente realizzata utilizzando una lamiera grecata con funzione di cassaforma a perdere) (Figura 1.1c);

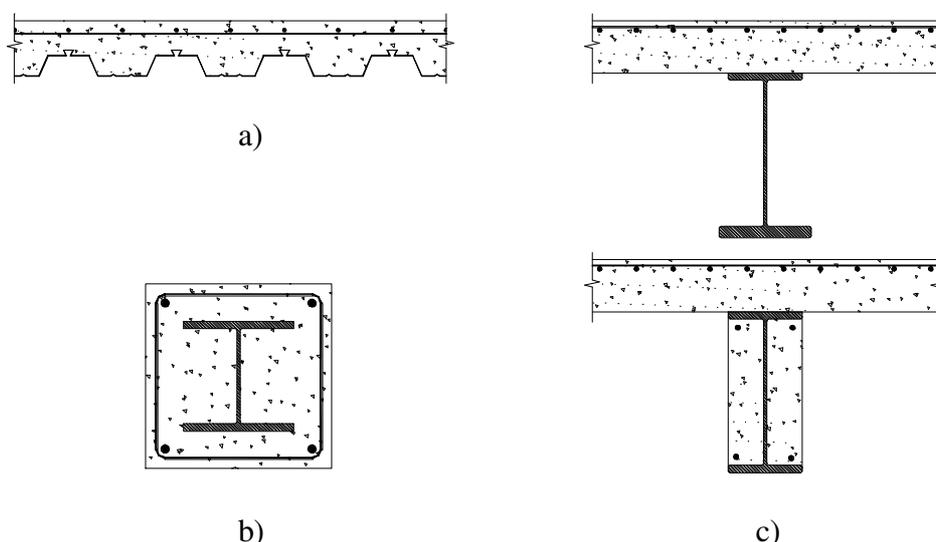


Figura 1.1: alcuni elementi strutturali di tipo misto acciaio-calcestruzzo.

L'utilizzazione del sistema composto acciaio-calcestruzzo per le travi è senz'altro più diffusa rispetto a quella dei due elementi strutturali brevemente descritti sopra. Infatti, poiché le travi sono elementi essenzialmente inflessi, il ricorso al sistema misto consente di utilizzare i materiali nel modo che più si addice alla loro natura.

Infatti, con particolare riferimento alla condizione di momento positivo, l'acciaio è soggetto a sforzi essenzialmente di trazione e il calcestruzzo a sforzi di compressione: questa evenienza permette di limitare il manifestarsi dell'instabilità nel primo e della fessurazione nel secondo.

Inoltre, esistono due ambiti piuttosto distinti di applicazione delle travi composte: se da un lato è possibile coprire luci dell'ordine dei 10 m (tipiche dei fabbricati), utilizzando profilati commerciali tipo HE o simili, d'altro canto, utilizzando profilati ottenuti saldando piatti d'acciaio, possono realizzarsi travi con campate di 30 ÷ 40 m da utilizzare per la realizzazione di ponti a travata.

In ogni caso le travi impiegate non possono essere modellate con la teoria delle travi in cemento armato; in particolare è difficile ritenere verificata l'ipotesi di omogeneità della sezione e, soprattutto, non si possono trascurare gli scorrimenti che si originano tra soletta e

profilato. Pertanto i risultati che si otterrebbero (ad esempio, nel calcolo delle frecce) trascurando quest'ultimo aspetto e, quindi, ipotizzando la *completa connessione* tra la parte in acciaio e quella in calcestruzzo, sarebbero certamente a svantaggio di sicurezza rispetto a quelli reali.

A differenza di quanto avviene per le colonne e con molta più importanza di quanto può riscontrarsi nelle solette, la *connessione* tra le parti in acciaio e in calcestruzzo gioca un ruolo determinante nel comportamento deformativo e tensionale dell'elemento. Infatti, nei pilastri le sollecitazioni sono essenzialmente normali e, quindi, l'aderenza tra l'elemento in acciaio e il calcestruzzo è quasi sempre sufficiente ad assicurare la connessione, mentre nelle solette bastano piccole increspature della lamiera grecata per evitare gli scorrimenti.

Nelle travi, invece, bisogna predisporre opportuni dispositivi di connessione che, peraltro, devono essere progettati tenendo conto dei rapporti di rigidezza dei materiali impiegati secondo le relazioni normative (cfr. capitolo 2).

La presenza di tali elementi di connessione causa, dunque, una modifica del comportamento della trave variandone anche il meccanismo resistente.

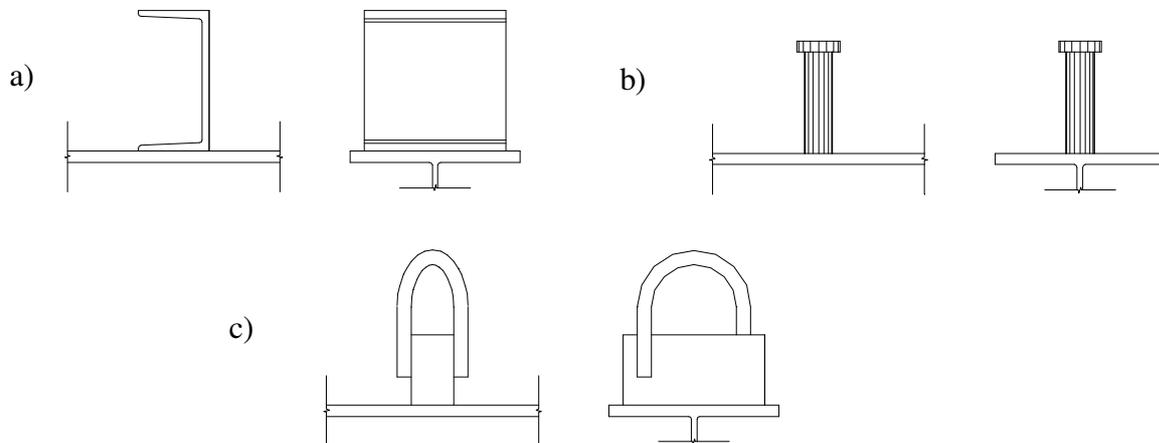


Figura 1.2: alcuni dei tipi più comuni di connettori a taglio per travi miste.

Nella Figura 1.2 sono riportati vari tipi di connettore, anche se la ricerca e la normale pratica realizzativa fanno riferimento essenzialmente a quello a “piolo saldato” (*welded stud*) (Figura 1.2b).

La deformabilità di questi ultimi non impedisce lo scorrimento tra profilato e soletta e, in linea di principio, il comportamento della trave è influenzato anche dalla relazione che lega la forza trasmessa dai connettori e il suddetto scorrimento.

Come si vedrà nel seguito tale relazione è di tipo decisamente non-lineare e, quindi, una modellazione fedele del comportamento delle travi non può fondarsi sulla semplice ipotesi di comportamento lineare della connessione in base alla quale è possibile pervenire ad una equazione differenziale della trave composta.

Modelli analitici di questo tipo non danno la possibilità di tenere conto di altri fenomeni che caratterizzano il comportamento dei materiali che si utilizzano.

In condizioni di servizio, ad esempio, è necessario poter considerare gli effetti della fessurazione del calcestruzzo in termini di riduzione della rigidezza flessionale. Il fenomeno in questione ha avuto una sua modellazione ormai piuttosto consolidata con riferimento agli elementi in C.A. tesi o inflessi, ma la applicazione di tali modelli alle travi miste con connessione deformabile non è altrettanto consolidata.

Un'ultima questione è quella relativa al comportamento della connessione nelle zone in cui la soletta è fessurata per effetto del momento negativo. Per formulare ipotesi in merito a

questo aspetto del problema si deve fare riferimento a particolari esperimenti [39] condotti per simulare la situazione in oggetto: i risultati che se ne traggono sono piuttosto dispersi, ma mettono in evidenza la possibilità che in certe situazioni le riduzioni di rigidità dei connettori che si trovano in zona tesa possano essere anche rilevanti.

Un modello di calcolo che voglia essere sufficientemente accurato deve, dunque, tenere conto di tutti questi fenomeni.

1.2. Breve analisi bibliografica.

L'inquadramento generale delle diverse problematiche che contraddistinguono le strutture miste acciaio-calcestruzzo può essere tratto da [36] in cui vengono fornite anche le linee guida per la progettazione degli elementi strutturali secondo l'EC4 ([17]). Inoltre è possibile trovarvi anche un'ampia bibliografia in merito a lavori di carattere specifico ed una panoramica introduttiva alla filosofia di progetto degli stati limite adottata dagli Eurocodici, i quali vengono considerati come principale riferimento normativo, effettuando, di tanto in tanto, qualche confronto con le norme nazionali britanniche (BS: British Standards).

Altri riferimenti di carattere generale si possono trovare in una raccolta di "articoli" editi da Narayanan, alcuni dei quali esplicitamente citati anche nell'introduzione ([19], [28], [47]).

Una panoramica sui diversi modelli formulati per le travi composte a parziale interazione è stata presentata nei numeri precedenti facendo riferimento a [37], in cui vengono riportate le ipotesi su cui essi si fondano ed i risultati cui conducono.

Dalla complessità che ne deriva si evince che i metodi di calcolo da adottare per la soluzione del problema in oggetto devono essere senz'altro di tipo numerico riconducendo la questione nell'ambito delle usuali tecniche di risoluzione adottate nell'analisi strutturale: si può far riferimento al metodo delle *differenze finite* (come in [4], [8], [9], [14], [15], [50], [51] sotto diverse ipotesi) e a quello degli *elementi finiti* (cui si fa riferimento in [1], [24]).

Il punto centrale della ricerca nell'ambito del sistema misto acciaio-calcestruzzo è costituito dallo studio della connessione, del suo comportamento e degli elementi che la realizzano. Anche l'attività sperimentale è coinvolta nello studio del comportamento dei connettori: alcuni risultati relativi a prove di push-test volte a riprodurre il legame tra forza e scorrimenti tra le due parti della trave sono riportati in [39].

Oltre alla modellazione macroscopica del comportamento della connessione, in [35] sono stati condotti anche studi sulle interazioni tra questi ed il calcestruzzo che li circonda al fine di indagarne i meccanismi di rottura.

La deformabilità della connessione non comporta soltanto una variazione del comportamento delle travi in termini di deformazioni, ma si può riflettere anche sulle caratteristiche della sollecitazione. Questo fatto, ovviamente, si verifica nelle strutture staticamente indeterminate (si pensi alle travi continue) nelle quali le caratteristiche della sollecitazione non sono indipendenti dal comportamento flessionale e, quindi, sono soggette a fenomeni di redistribuzione [13].

Un altro tipo di redistribuzione è quella dovuta alla fessurazione del calcestruzzo nelle zone di momento negativo. Il punto di partenza per lo studio di qualsiasi problematica relativa alla fessurazione è senza dubbio il manuale del CEB dedicato a fessurazione e deformazioni degli elementi strutturali in cemento armato (*CEB manual on Cracking and Deformations* [6]) nel quale vengono esposti i vari modelli di tension stiffening sia per elementi tesi che inflessi oltre ad un'ampia discussione sulle verifiche da effettuare per il controllo della ampiezza delle fessurazioni.

La complessità delle interazioni tra le varie parti che costituiscono una trave composta e la relativa novità del sistema misto richiede un impegno notevole di carattere sperimentale e, quindi, in tutti i lavori dedicati all'esposizione di un qualche metodo di calcolo si trovano sempre dati sperimentali di confronto ed, eventualmente, di calibrazione. A volte capita che le

prove non siano molto documentate per questo si è fatto riferimento a due lavori esclusivamente dedicati alla illustrazione di risultati ottenuti tramite prove sperimentali.

Nel primo ([3]) possono trovarsi le curve carico-spostamento relative a sei travi continue su tre appoggi caricate con forze concentrate nel punto medio di una campata o di entrambe: vengono riportate con un certo dettaglio anche le caratteristiche dei materiali ed alcune quantità relative alla condizione di collasso.

Nel secondo ([31]), invece, vengono trattate travi continue su quattro appoggi e l'interesse per questo lavoro deriva anche dalle fotografie degli apparati sperimentali e delle travi portate a rottura. Il lavoro in questione è legato a [33] e ne rappresenta il completamento dal momento che i risultati che vi si trovano integrano con maggior dettaglio quelli già riportati in [33].

Un tipo di prova sperimentale del tutto singolare del tutto singolare è documentato in [20] in cui si elabora un metodo di calcolo per travi miste in cui oltre allo scorrimento trave-soletta si porta in conto anche quello che avviene tra armature e calcestruzzo. L'intento è quello di modellare il comportamento delle travi miste in zona tesa e all'uopo vengono allestite tre prove di carico su altrettante travi semplicemente appoggiate in cui la soletta è posta al di sotto del profilato. In questo modo la soletta è tutta sollecitata a tensoflessione e, quindi, può essere, fessurata.

1.3. Obiettivi e contenuti del presente lavoro.

La breve rassegna delle principali problematiche che caratterizzano il comportamento delle travi composte acciaio-calcestruzzo ha già messo in luce quali possono essere gli aspetti rilevanti dal punto di vista della ricerca. Inoltre, il cenno che è stato fatto ad una bibliografia piuttosto ampia rende possibile la definizione degli obiettivi da porsi.

In particolare, come si vedrà nel seguito, è piuttosto facile estendere il modello lineare esposto in [24], ottenendo una procedura iterativa che consenta di tenere conto in primo luogo della non-linearità del comportamento della connessione e, quindi, dei fenomeni relativi alla fessurazione del calcestruzzo nelle zone di momento negativo.

In questo modo, però, continuando ad assumere legami lineari sia per l'acciaio che per il calcestruzzo, bisogna limitare il campo di indagine alle condizioni d'esercizio, poiché l'analisi delle travi in condizioni ultime richiede anche la modellazione dei legami costitutivi non lineari dei materiali componenti.

Per la messa a punto della procedura suddetta bisogna anche fare alcune ipotesi in merito alla fessurazione del calcestruzzo ed, in particolare, cercare di adattare alla soletta i modelli di *tension stiffening* formulati per gli elementi in cemento armato.

La consistenza di tali ipotesi e la conseguente affidabilità della procedura medesima si deve appurare con l'ausilio di alcuni risultati disponibili in letteratura e relativi all'applicazione di altre procedure numeriche o ottenuti con prove sperimentali.

Dopo questa validazione il programma di calcolo automatico viene utilizzato per la conduzione di estese analisi parametriche.

L'ambito di applicazione di tale procedura si può dividere a seconda che si analizzino travi isostatiche (semplicemente appoggiate) o iperstatiche (incastrate-appoggiate o doppiamente incastrate).

Alla differenza tra questi due casi applicativi si è già fatto cenno in merito ai fenomeni ridistributivi che si verificano a causa della flessibilità della connessione e della fessurazione del calcestruzzo.

Per le travi isostatiche l'attenzione si deve focalizzare sul solo aspetto deformativo (con particolare riferimento alla valutazione delle frecce) e sulle influenze che la non-linearità della connessione determina su di esso.

Per quelle iperstatiche, invece, bisogna cercare di capire l'influenza della deformabilità della connessione anche sull'andamento delle caratteristiche della sollecitazione.

Quest'ultimo aspetto potrebbe sembrare meno immediato rispetto a quello delle frecce la cui stima è indispensabile per la verifica dello stato limite di deformazione. Tuttavia, la valutazione delle tensioni è necessaria per una verifica di resistenza in condizioni d'esercizio, ad esempio, per il calcolo della tensione di esercizio nelle armature che si trovano a ridosso di un appoggio interno di una trave continua.

2. QUADRO NORMATIVO DI RIFERIMENTO.

Come avviene anche per altri sistemi costruttivi impiegate nella realizzazione delle strutture e, in generale, per tutte le attività, il quadro normativo si distingue in due livelli di regole: da un lato ci sono le norme nazionali e d'altra parte le direttive o disposizione della comunità europea.

Anche nel caso del sistema misto acciaio-calcestruzzo questa distinzione si verifica, benché non esista un l'apparato normativo nazionale propriamente detto: si deve far riferimento, infatti, soltanto ad una disposizione del CNR a cura della *Commissione per lo Studio delle Norme sulle Costruzioni in Acciaio*.

Viceversa, nell'ambito degli Eurocodici per la disciplina dei lavori dell'ingegneria civile è stato dedicato un intero numero alla tipologia in questione affermandone l'importanza e la specificità delle sue problematiche rispetto a quelle che caratterizzano in comportamento dell'acciaio e del cemento armato.

Poiché la suddetta istruzione CNR 10016/85 [7] è in via di revisione e dal momento che la nuova versione ricalcherà in maniera piuttosto fedele quanto stabilito dalla normativa europea ci si limita ad esporre i principali dettami di quest'ultima.

A livello comunitario la normativa di riferimento per le strutture composte di acciaio e calcestruzzo è l'*Eurocodice 4* [17] che si articola fondamentalmente in due parti: nella parte 1-1 sono dettate le "*Regole generali e regole per gli edifici*", mentre nella parte 2 vengono trattati gli aspetti peculiari della costruzione dei ponti. Esiste anche una parte 1-2 dedicata alla *resistenza al fuoco* degli elementi strutturali che, come si è detto, è uno dei punti delicati delle strutture miste.

Poiché tutte le sezioni delle travi oggetto di studio nel presente lavoro sono progettate in ottemperanza a quanto stabilito dall'EC4, è opportuno richiamare con un certo dettaglio i punti salienti relativi sia alla filosofia di progetto che al caso specifico delle travi miste.

2.1. Verifiche e combinazioni di carico.

Già in merito al metodo di verifica si ha una prima differenza rispetto alla norma nazionale, poiché l'Eurocodice prevede il solo utilizzo del *metodo semiprobabilistico agli stati limite* e prende in considerazione le seguenti situazioni di verifica:

- stati limite ultimi:
 - perdita dell'equilibrio della struttura o di una sua parte;
 - collasso per eccessiva deformazione, rottura o perdita di stabilità di qualsiasi parte di essa;
- stati limite di servizio:
 - stato limite di deformazione;
 - stato limite di vibrazione;
 - danneggiamento del calcestruzzo per eccessiva compressione (che può influire sulla sua durabilità);
 - scorrimenti all'interfaccia.

Nella verifica allo stato limite ultimo sia i coefficienti parziali di sicurezza per le varie azioni che quelli relativi alle resistenze dei materiali sono decisi a livello nazionale: i valori di tali coefficienti si dicono "incasellati" (*boxed-values*) poiché vengono riportati all'interno di un rettangolino.

Nello spirito del metodo degli stati limite, le relazioni di calcolo delle combinazioni di carico allo S.L.U. si possono ottenere con le seguenti formule:

- situazioni di progetto persistenti e transitorie per verifiche diverse da quelle a fatica (combinazioni fondamentali):

$$F_d = \sum_j \gamma_{g,j} G_{k,j} + \gamma_{q,1} Q_{1k} + \sum_{j=2}^n (\gamma_{q,1} \psi_{0,j} Q_{k,j}) ; \quad (2.1)$$

- situazione di progetto accidentale (se non diversamente specificata):

$$F_d = \sum_j \gamma_{gA,j} G_{k,j} + A_d + \gamma_{q,1} Q_{1k} + \sum_{j=2}^n (\gamma_{q,1} \psi_{0,j} Q_{k,j}) ; \quad (2.2)$$

nella quale A_d è il valore di progetto dell'azione accidentale in questione.

I fattori di combinazione ψ_0, ψ_1, ψ_2 figurano nella Tabella 2.1 e sono tratti dall'Eurocodice 1 che verte sulle *Basi della progettazione e azioni sulla struttura*.

Tabella 2.1: coefficienti parziali di sicurezza per azioni su strutture di edifici per situazioni di progetto persistenti e transitorie..

	Azioni permanenti (γ_g)	Azioni variabili (γ_q)	
		Azione principale	Azioni associate
Effetto sfavorevole	1,35	1,5	1,5
Effetto favorevole	1,0	0	0

I fattori di combinazione ψ_0, ψ_1, ψ_2 figurano nella Tabella 2.2 e sono tratti dall'Eurocodice 1 che verte sulle *Basi della progettazione e azioni sulla struttura*.

Bisogna specificare i valori dei coefficienti parziali di sicurezza per le resistenze dei materiali che vengono riportate nella Tabella 2.3: tutti i coefficienti, sia quelli relativi alla resistenza che quelli riguardanti le azioni, sono esempi di *valori incasellati* e, quindi, vengono fissati a livello nazionale. I valori riportati nelle varie tabelle sono quelli di riferimento.

Tabella 2.2: alcuni valori dei fattori di combinazione ψ_0, ψ_1, ψ_2 .

Coefficienti	ψ_0	ψ_1	ψ_2
Carichi per uffici, categoria C	0,7	0,7	0,6
Vento	0,6	0,5	0

Tabella 2.3: coefficienti parziali di sicurezza per le resistenze dei materiali.

Combinazione	Acciaio strutturale (γ_a)	Calcestruzzo (γ_c)	Acciaio per armatura (γ_s)	Acciaio per lamiera grecata (γ_{ap})
Fondamentale	1,10	1,5	1,15	1,10
Accidentale (eccetto sisma)	1,0	1,3	1,0	1,0

2.2. Caratteristiche dei materiali e delle sezioni.

Per i diversi materiali si vengono riportate le caratteristiche essenziali sia in termini di legame costitutivo che in merito a fenomeni riguardanti il calcestruzzo e l'acciaio. Per il primo si riportano le linee guida per la modellazione dei fenomeni lenti, per il secondo si opera una valutazione in merito al problema dell'instabilità.

In quest'ottica vengono dettati i criteri per la classificazione delle sezioni dei diversi profilati in quattro classi : solo per le sezioni appartenenti alle prime due di queste è possibile utilizzare tutta la resistenza plastica dell'acciaio senza che insorgano fenomeni di instabilità, mentre per quelle appartenenti alla quarta classe bisogna mettere esplicitamente in conto gli effetti dell'instabilità locale nel determinare il momento resistente o la resistenza a compressione di un elemento strutturale.

Le sezioni trasversali sono classificate in funzione della classe più sfavorevole dei suoi elementi di acciaio che risultano compressi nelle condizioni di carico considerate (anima e piattabande). Per questo motivo la classe della sezione dipende anche dal segno del momento che la sollecita.

Le regole per la classificazione delle sezioni sono le stesse previste dall'EC3 per le sezioni in acciaio e, vista la notevole articolazione che le caratterizza e la importanza relativamente limitata che tale argomento può avere nell'economia del lavoro che si intende svolgere, non si ritiene di dover entrare maggiormente nel merito.

2.3. Resistenza delle sezioni.

L'EC4 fornisce un dominio di resistenza per le travi sottoposte contemporaneamente a taglio e a flessione. La formulazione analitica di tale dominio può essere espressa con la seguente relazione:

$$M_{Sd} \leq \begin{cases} M_{Rd} & \text{se } V_{Sd} \leq V_{pl,Rd} / 2 \\ M_{f,Rd} + (M_{Rd} - M_{f,Rd}) \cdot \left[1 - \left(2 \frac{V_{Sd}}{V_{pl,Rd}} - 1 \right)^2 \right] & \text{se } V_{Sd} > V_{pl,Rd} / 2 \end{cases} \quad (2.3)$$

nella quale, oltre agli altri simboli di evidente significato, compare anche il la quantità $M_{f,Rd}$ che rappresenta “la resistenza flessionale plastica di progetto di una sezione trasversale costituita dalle sole piattabande, con la sezione efficace utilizzata nel calcolo di M_{Rd} ”(Figura 2.1).

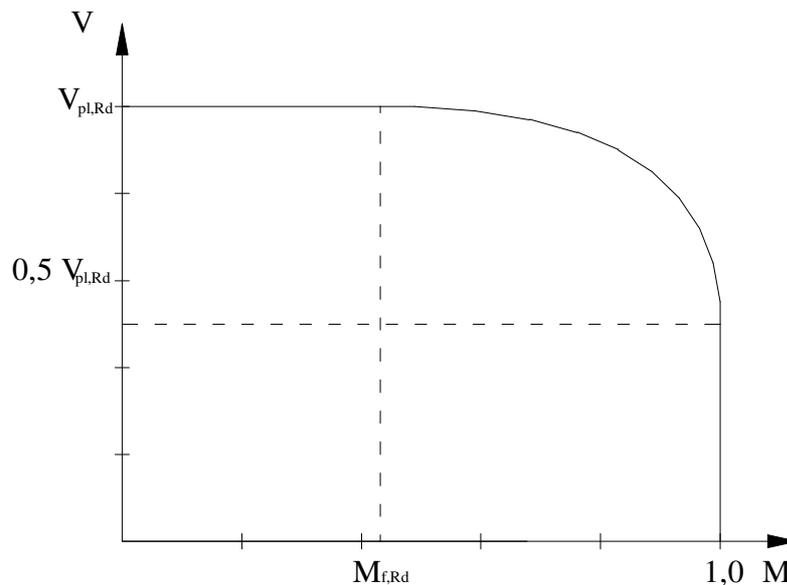


Figura 2.1: dominio di resistenza allo S.L.U. secondo l'EC4.

Il valore del taglio plastico resistente $V_{pl,Rd}$ si può determinare considerando le due prescrizioni seguenti:

- in luogo dell'area $A_{a,anima}$ bisogna considerare un valore A_v leggermente maggiore coincidente con l'area a taglio dell'elemento strutturale in acciaio che nell'EC3 (dedicato alle strutture in acciaio) è definita come segue:

$$A_v = 1,04 \cdot A_{a,anima} ; \quad (2.4)$$

- il coefficiente di sicurezza γ_a deve essere sostituito da quello consigliato dall'EC4 che vale 1,10.

Complessivamente, allora, il taglio plastico $V_{pl,Rd}$ è maggiore del taglio ultimo V_u definito dalla normativa nazionale e, in particolare, risulta:

$$V_{pl,Rd} = 1,04 \cdot \frac{1,12}{1,10} V_u \approx 1,06 \cdot V_u . \quad (2.5)$$

2.4. I metodi di analisi delle strutture.

Il calcolo delle sollecitazioni per il progetto e la verifica delle travi può essere condotto sia tramite una analisi plastica globale che con l'ausilio ad una analisi elastica globale.

L'analisi plastica globale può essere effettuata utilizzando sia il metodo elasto-plastico che quello rigido-plastico.

In quanto al primo metodo, non sono dettate prescrizioni particolari se non quella di considerare il reale legame carico-scorrimento dei connettori.

Per l'analisi rigido-plastica, invece, devono essere rispettate alcune prescrizioni in corrispondenza delle sezioni in cui si realizzano le cerniere plastiche al fine di assicurarne una sufficiente capacità rotazionale. Nei casi comuni di travi continue, tali prescrizioni possono essere facilmente assicurate facendo in modo che esistano assegnati rapporti dimensionali tra le luci delle varie campate.

In quanto all'analisi elastica globale delle travi per edifici, l'EC4 consente di scegliere tra l'analisi non fessurata ("*uncracked analysis*") e quella fessurata ("*cracked analysis*").

Nel primo caso si può assumere lungo l'intera lunghezza della trave la rigidità flessionale EI_1 , ottenuta considerando la soletta interamente reagente.

Nel secondo caso si deve utilizzare il valore fessurato EI_2 per una lunghezza pari al 15% della luce della campata da ciascun lato di ogni appoggio interno e il valore EI_1 per il resto della trave.

L'andamento di progetto del momento flettente derivato da un'analisi elastica può essere ridistribuito in modo da soddisfare l'equilibrio e tener conto degli effetti della fessurazione del calcestruzzo, del comportamento anelastico dei materiali e dell'instabilità locale dell'acciaio.

A tale fine l'EC4 fornisce i valori percentuali delle massime riduzioni consentite del valore dei momenti a seconda della classe cui appartengono le sezioni della trave e del tipo di analisi effettuata (Tabella 2.4).

Tabella 2.4: coefficienti di ridistribuzione allo S.L.U. per analisi elastica globale.

Classe	1	2	3	4
Analisi non fessurata	40	30	20	10
Analisi fessurata	25	15	10	0

Poiché la ridistribuzione è dovuta alla formazione di cerniere plastiche in corrispondenza degli appoggi interni ed alla fessurazione che si verifica nelle stesse zone, la differenza tra i valori delle riduzioni dei momenti per l'analisi fessurata e non fessurata consente di fissare in una percentuale del 10-15% il contributo dovuto alla fessurazione.

2.5. Progetto degli elementi di connessione.

Il punto in questione rappresenta la parte più originale delle strutture in sistema misto rispetto a quelli in acciaio o in cemento armato.

In primo luogo si precisa che l'Eurocodice consente di disporre i connettori a passo costante, benché l'andamento delle sollecitazioni di scorrimento, analogo a quello del taglio, lascerebbe intendere che questa non sia una soluzione meccanicamente vantaggiosa (si pensi alle staffe in una trave in C.A. per rendersene conto): tuttavia il passo costante è assai più facile da realizzare, specie se si considerano i casi di soletta su lamiera grecata con piegature non parallele alla trave.

Si è detto che la connessione deve essere legata al taglio il quale, a parità di carico, dipende dalla luce L della trave: da questo ragionamento scaturiscono limitazioni del grado di connessione rispetto ad L . Infatti, affinché i connettori possano considerarsi duttili, deve essere soddisfatta la seguente relazione:

$$\frac{N}{N_f} = \begin{cases} \geq 0,4 & L \leq 5 \text{ m} \\ \geq 0,25 + 0,03 \cdot L & 5 \text{ m} \leq L \leq 25 \text{ m} , \\ \geq 1,0 & L > 25 \text{ m} \end{cases} \quad (2.6)$$

valida per una sezione il cui profilato abbia ali uguali. In particolari condizioni, poi, (ad esempio per diametri dei connettori di 19÷20 mm, piattabande uguali, soletta costituita da lamiera grecata ordita ortogonalmente alle travi) si hanno limiti più ampi di quelli dettati dalla (2.15):

$$\frac{N}{N_f} = \begin{cases} \geq 0,4 & L \leq 10 \text{ m} \\ \geq 0,04 \cdot L & 10 \text{ m} \leq L \leq 25 \text{ m} , \\ \geq 1,0 & L > 25 \text{ m} \end{cases} \quad (2.7)$$

La duttilità della connessione è una caratteristica fondamentale per il funzionamento della stessa, specialmente quando i connettori sono disposti a passo costante, nel qual caso tale proprietà consente la migrazione delle tensioni tangenziali dalle parti più caricate a quelle meno sollecitate (ad esempio dagli estremi verso il centro delle travi semplicemente appoggiate), scongiurando anche i rischi di una rottura fragile.

Il calcolo del grado di connessione richiede la conoscenza del valore di N_f che, a sua volta, si ottiene a valle della valutazione della forza F_c che i connettori devono trasmettere tra soletta e profilato. Si distinguono due comportamenti:

- *completo ripristino di resistenza* (piena connessione): in tal caso tale forza in oggetto si indica con F_{cf} (la f sta per “full”):

$$F_{cf} = \min \left\{ \frac{A_a f_y}{\gamma_a}, \frac{0,85 \cdot A_c f_{ck} + A_{se} f_{sk}}{\gamma_c} \right\}, \quad (2.8)$$

con evidente significato dei simboli;

- *parziale ripristino di resistenza* (connessione parziale): uno dei metodi proposti consiste in una diminuzione della forza F_{cf} determinata al punto precedente in maniera proporzionale alla differenza tra il valore di calcolo del momento sollecitante M_{Sd} e quello del momento plastico resistente $M_{Rd,apl}$ del solo profilo di acciaio, secondo la seguente relazione:

$$F_c = \frac{M_{Sd} - M_{apl,Rd}}{M_{pl,Rd} - M_{apl,Rd}} F_{cf}, \quad (2.9)$$

valida nell’ipotesi di connettori duttili.

A questo punto, per il calcolo di N_f bisogna stabilire quale sia il contributo di un solo connettore; nell’EC4 sono riportati diversi tipi di connettore e per ognuno di essi la relazione che consente di risalire al valore di calcolo della resistenza di progetto P_{Rd} unitaria.

Poiché nel presente studio si fa riferimento ai soli connettori a piolo saldato (“*welded studs*”) si cita di seguito soltanto la relazione suddetta relativa a questo tipo di connettore:

$$P_{Rd} = \min \left\{ \frac{0,8 \cdot f_u \frac{\pi d^2}{4}}{\gamma_v}, \frac{0,29 \cdot \alpha d^2 \sqrt{f_{ck} E_{cm}}}{\gamma_v} \right\}, \quad (2.10)$$

nella quale i simboli hanno il seguente significato:

d è il diametro del gambo del piolo;

f_u è la resistenza ultima a trazione del materiale (comunque non maggiore di 500 N/mm²);

f_{ck} è la resistenza cilindrica caratteristica del cls;

E_{cm} è il valor medio del modulo secante del cls (l’EC2 fornisce la seguente relazione:

$$E_{cm} = 8500 \cdot (f_{ck} + 8)^{1/3}; \quad (2.11)$$

α è un coefficiente definito come segue:

$$\alpha = \begin{cases} 0,2 \cdot \left(\frac{h}{d} + 1\right) & \text{per } 3 \leq \frac{h}{d} \leq 4 \\ 1 & \text{per } \frac{h}{d} > 4 \end{cases}, \quad (2.12)$$

essendo h l'altezza per piolo;

γ_v è il coefficiente parziale di sicurezza pari a 1,25.

Per completezza si ritiene opportuno riportare anche la relazione che consente il calcolo di P_{Rd} secondo l'istruzione del CNR al fine di poterne desumere alcune differenze rispetto alla (2.10). La relazione in questione si presenta come segue:

$$P_{Rd} = \min \left\{ \frac{d \cdot h' (3,2 + 0,11 \cdot f_{ck})}{\gamma_s}, \frac{0,7 \pi d^2 f_{yk}}{40 \gamma_a} \right\} [\text{kN}], \quad (2.13)$$

nella quale, oltre agli altri simboli di chiaro significato, h' è l'altezza efficace dei pioli calcolabile come segue:

$$h' = \begin{cases} h & \text{se } h \leq 4d \\ 4 \cdot d & \text{se } h > 4d \end{cases}. \quad (2.14)$$

Quanto ai coefficienti γ_s , γ_a , bisogna assegnare valore unitario per le verifiche allo S.L.S., mentre devono essere posti pari a 1,40 e 1,10, rispettivamente, per le verifiche allo S.L.U. e 1,0 allo S.L.S.

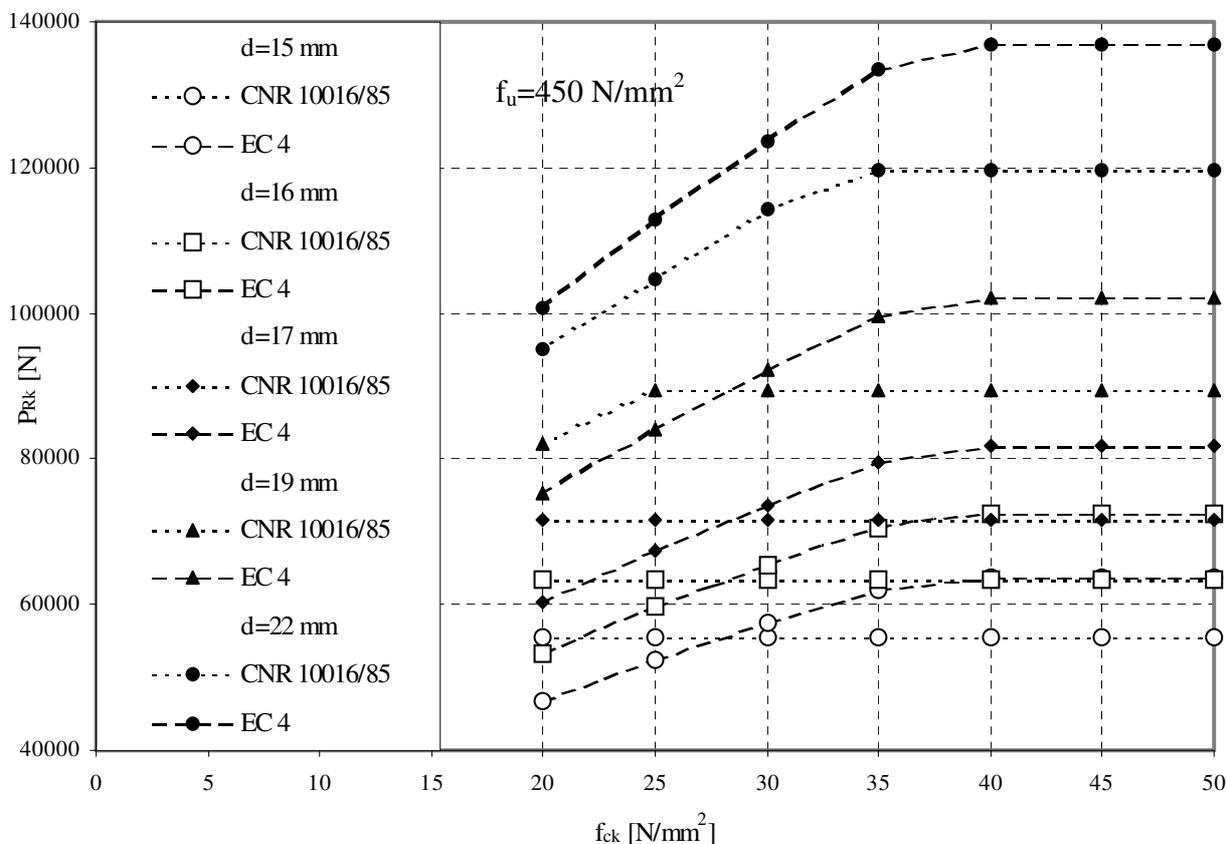


Figura 2.2: confronto della resistenza caratteristica dei connettori a piolo determinate in accordo ai due documenti normativi.

Nella Figura 2.2 vengono riportati i diversi andamenti delle due formule con riferimento a diversi tipi di calcestruzzo e diametri dei pioli (la resistenza al limite di snervamento f_{yk} o f_u dell'acciaio costituente i connettori è assunta costante e pari a 450 N/mm^2).

Una volta definita la (2.10), è possibile calcolare il numero N_f di pioli necessari alla completa connessione

$$N_f = \frac{F_{cf}}{P_{Rd}}, \quad (2.15)$$

o il numero minimo N di connettori necessari per il parziale ripristino della resistenza:

$$N = \frac{F_c}{P_{Rd}}. \quad (2.16)$$

Nei collegamenti a parziale ripristino di resistenza non si può ritenere che la resistenza ultima della sezione sia la stessa di quella che si ha nel caso di piena connessione.

In particolare, con riferimento ai momenti, la sezione di una trave con connessione parziale non può essere sollecitata fino al valore $M_{pl,Rd}$, della resistenza plastica. Pertanto esiste una relazione tra il momento sollecitante massimo M_{Sd} che la sezione sopporta e la forza F_c trasmessa dalla connessione (o, tramite la (2.16), il numero di connettori impiegati).

Tale relazione si può determinare con l'ausilio della teoria plastica, ma l'EC4 propone alcune possibili semplificazioni. Limitandoci, per semplicità, al caso dei connettori duttili, l'EC4 propone il legame lineare espresso dalla relazione seguente:

$$F_c = \frac{M_{Sd} - M_{apl,Rd}}{M_{pl,Rd} - M_{apl,Rd}} \cdot F_{cf}. \quad (2.17)$$

nella quale $M_{apl,Rd}$ e $M_{pl,Rd}$ sono i valori di progetto delle resistenze plastiche a momento positivo che caratterizzano, rispettivamente, la sola sezione di acciaio strutturale e la sezione composta con collegamento completo.

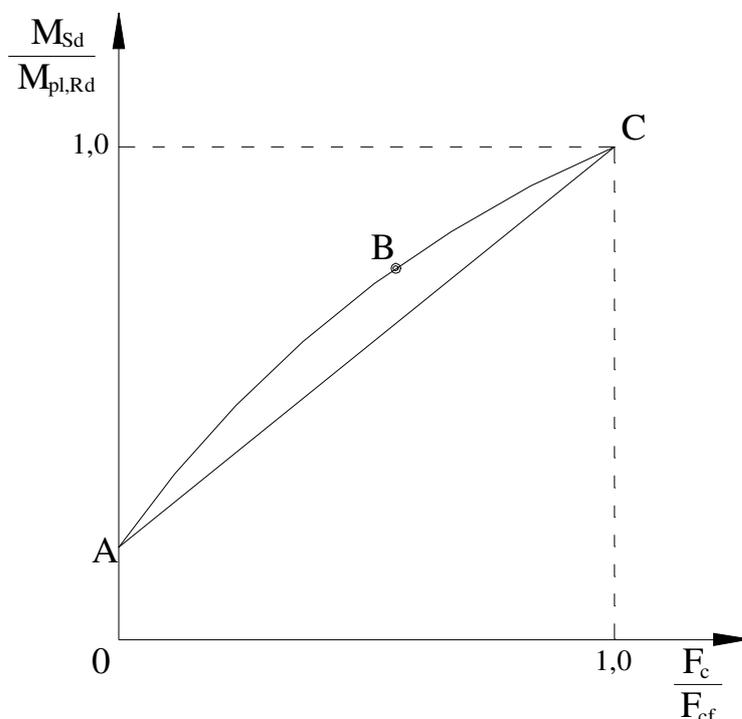


Figura 2.3: legame tra momento sollecitante M_{Sd} e forza F_c trasmessa dalla connessione.

La (2.17) è riportata nella Figura 2.3 insieme al legame effettivo di tipo non lineare rappresentato in maniera qualitativa.

2.6. Verifiche degli stati limite di servizio.

Per il calcolo delle frecce f nelle verifiche allo stato limite di servizio l'EC4 fornisce la seguente formula semplificata:

$$\frac{f}{f_c} = 1 + c \cdot \left[1 - \frac{N}{N_f} \right] \cdot \left[\frac{f_a}{f_c} - 1 \right]. \quad (2.18)$$

nella quale i simboli hanno il seguente significato:

f_c è la freccia elastica della trave nell'ipotesi di completa connessione;

f_a è la freccia elastica della trave nell'ipotesi di connessione assente;

N/N_f è il *grado di connessione*, cioè il rapporto tra il numero N di connettori effettivamente impiegati e quello N_f di connettori che sarebbero necessari per la completa connessione;

c è un coefficiente che vale 0,5 nel caso di travi puntellate e 0,3 per travi non puntellate in fase di costruzione.

La (2.18) asseconda quanto detto al capitolo 1 in merito al valore della freccia effettiva f rispetto ai valori denominati f_{full} e f_{abs} ; il primo coincide con f_c , mentre il secondo è lievemente diverso da f_a , anche tende ad esso per travi piuttosto alte e con soletta piccola.

Anche nella (2.18) i due valori suddetti rappresentano gli estremi di variazione della freccia δ che varia dall'uno all'altro a seconda della "consistenza" della connessione.

L'effetto della fessurazione del calcestruzzo nelle regioni di momento negativo sulla deformabilità della struttura può essere tenuto in considerazione utilizzando uno dei seguenti metodi di analisi:

- in primo luogo si può procedere analizzando dapprima la trave con riferimento alla sua rigidezza EI_1 e, quindi, ricalcolandola considerando una rigidezza EI_2 per quelle parti in cui la tensione di trazione nella soletta supera il 15% di f_{ck} ;

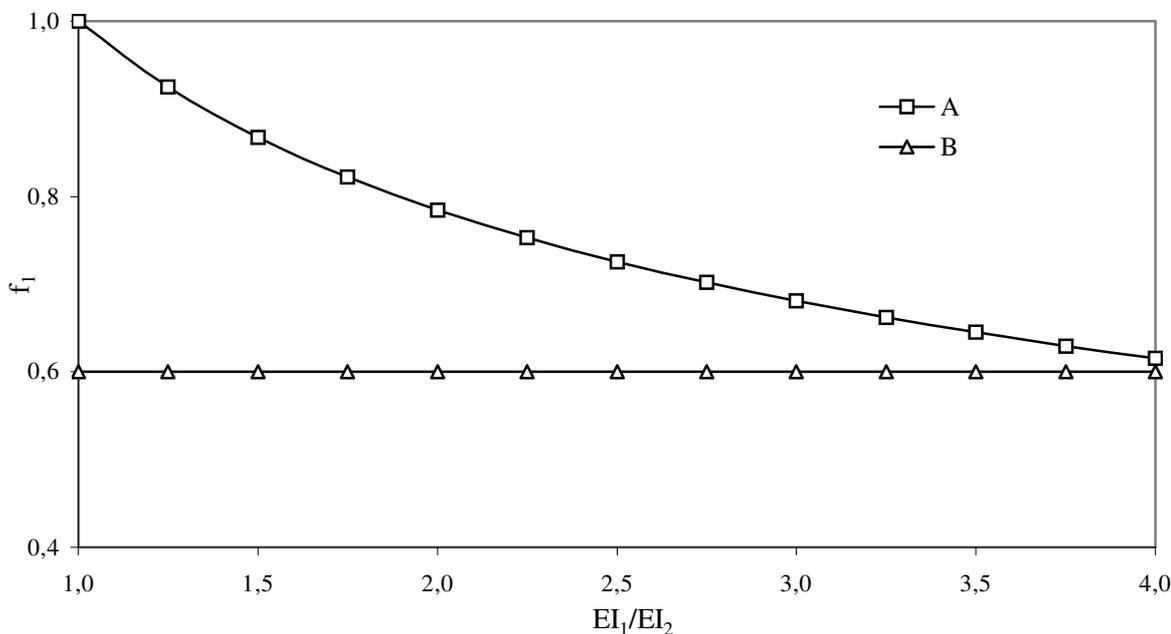


Figura 2.4: andamento del coefficiente di redistribuzione in fase servizio in funzione del parametro EI_{full}/EI_{abs} .

- per le travi con sezioni di classe 1, 2 o 3 si può procedere moltiplicando il momento flettente per il coefficiente riduttivo f_1 in tutti gli appoggi intermedi in corrispondenza

dei quali la tensione di trazione supera il 15% di f_{ck} . L'espressione di tale coefficiente è la seguente

$$f_1 = \left(\frac{EI_1}{EI_2} \right)^{-0,35} \geq 0,6, \quad (2.19)$$

e nella Figura 2.4 è riportato l'andamento di f_1 distinguendo la curva A che segue la (2.19) e la curva B che è costante rispetto al rapporto tra le rigidezze della sezione integra e fessurata. La prima può essere utilizzata quando "i carichi per unità di lunghezza su tutte le campate sono uguali e le lunghezze di tutte le campate non differiscono tra loro per più del 25%". In alternativa dovrebbe essere utilizzato il valore limite inferiore dettato dalla "curva" B.

Un altro aspetto rilevante delle verifiche di servizio è quello del controllo della fessurazione. Per il calcolo delle tensioni da utilizzare a tal fine si può ancora scegliere tra un'analisi fessurata ed una non fessurata come visto nel paragrafo dedicato al progetto delle sezioni, ma, ovviamente, facendo riferimento ai carichi derivanti dalle combinazioni definite per gli stati limite di servizio.

L'entità della redistribuzione che si può ammettere in questi casi, però, è necessariamente inferiore a quella vista nell'analisi con i carichi di progetto dal momento che con i carichi d'esercizio la redistribuzione è dovuta solo alla fessurazione della soletta. Non valgono, dunque, i valori riportati nella Tabella 2.4, ma, nel caso di una analisi non fessurata, si prevede una riduzione del momento pari al 15% per sezioni appartenenti alle classi 1 e 2 e del 10% per le altre. Viceversa, se si fa ricorso all'analisi fessurata non si può ammettere alcuna redistribuzione.

In primo luogo bisogna precisare che la necessità di considerare un larghezza collaborante deriva dalla inapplicabilità della teoria del De Saint Venant ed, in particolare, dalla inconsistenza dell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane su cui si fonda.

Studi sperimentali e numerici hanno evidenziato che nelle travi miste con soletta significativamente larga rispetto alla luce si verificano deformazioni di scorrimento nella stessa che si ingobba e, quindi, le tensioni normali non sono costanti lungo una corda parallela all'asse neutro (Figura 2.6) (si tratta di quello che nella letteratura anglosassone viene indicato come *shear lag*).

Il fenomeno potrebbe essere valutato in linea teorica con procedimenti numerici, ma la normativa si preoccupa di fornire al progettista un metodo veloce e pratico per evitare di sopravvalutare il contributo statico della soletta. Sia quella italiana che quella europea definiscono una *larghezza effettiva* B_{eff} che il linea di principio gode della seguente proprietà:

$$\sigma_1 B_{eff} = \int_{-B/2}^{B/2} \sigma_z dx \quad (2.20)$$

in cui σ_1 sono le tensioni presenti sull'asse della trave e al secondo membro compare la risultante delle tensioni normali.

Questi fatti, a ben vedere, sono in perfetto accordo con i coefficienti della Tabella 2.4 dal momento che le percentuali di cui sopra si possono ottenere proprio come differenza tra quelle riportate nelle due righe della tabella in oggetto.

2.7. Determinazione sperimentale delle proprietà della connessione.

L'ultima sezione della parte 1-1 dell'EC4 è dedicata alla "Progettazione assistita dalla sperimentazione", aspetto che anche in ambito strutturale sta assumendo rilevanza crescente.

In particolare si dettano le direttive per lo *Standard Push-Out Test* cui si è accennato anche nel capitolo 1; viene fornita la descrizioni del provino sia dal punto di vista geometrico (Figura 2.5) che in merito alla sua preparazione.

Il carico deve essere applicato mediante incrementi fino al 40% di quello per la rottura e, quindi, applicato ciclicamente 25 volte tra facendolo variare tra i valori del 5 % e del 40%. Gli incrementi di carico successivi dovrebbero essere applicati in modo che la rottura non si verifichi in meno di 15 minuti.

Se vengono effettuate tre prove su elementi nominalmente identici e lo scarto di ogni risultato rispetto al valore medio è contenuto nel 10 % di questo, si può assumere come resistenza caratteristica P_{Rk} il minimo carico di rottura applicato ai tre provini diviso per il numero di connettori e ridotto del 10% (anche questo è un “boxed value”).

A questo punto è possibile determinare la resistenza di progetto applicando la relazione seguente:

$$P_{Rd} = \frac{f_u}{f_{ut}} \frac{P_{Rk}}{\gamma_v} \leq \frac{P_{Rk}}{\gamma_v} . \quad (2.21)$$

in cui f_{ut} è la tensione ultima reale del materiale dei connettori impiegati nel provino, mentre gli altri simboli hanno lo stesso significato di quelli che compaiono nella (2.10).

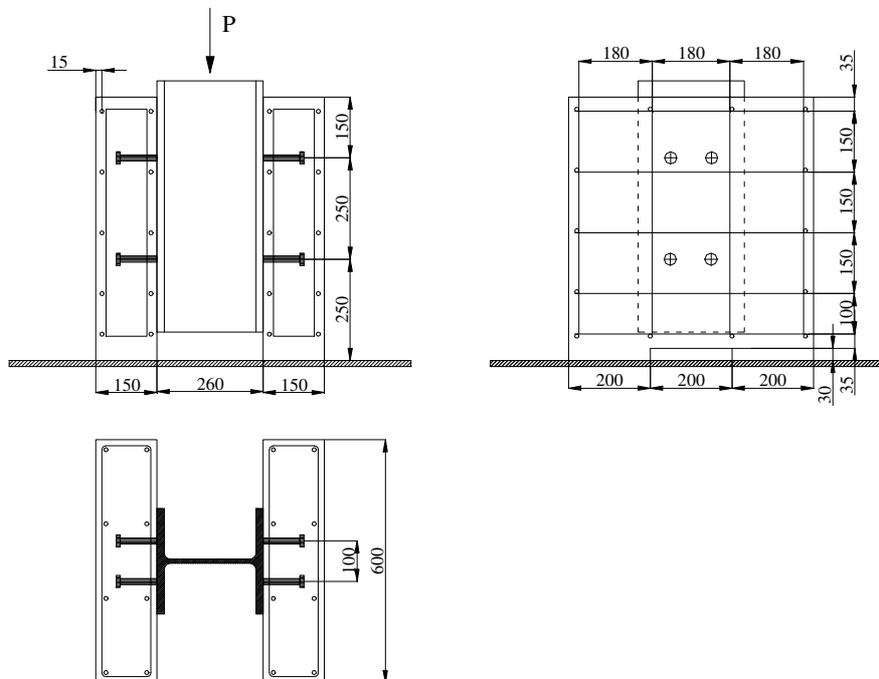


Figura 2.5: schema dello Standard Push-Test secondo l'EC 4.

2.8. Larghezza collaborante: un confronto tra le prescrizioni dei due documenti normativi.

Da quanto si è detto sopra è possibile trarre le principali informazioni contenute nella Istruzione CNR 10016/85 e nell'EC4 e alcune delle figure propongono il confronto in merito alle diverse relazioni consigliate.

Non si è fatto cenno alla problematica della larghezza collaborante che viene trattata in entrambi i documenti e che merita un discorso a parte per la sua importanza anche teorica. In [40] viene trattato l'argomento in questione e viene proposto un confronto che viene brevemente ripercorso nel seguito.

In primo luogo bisogna precisare che la necessità di considerare un larghezza collaborante deriva dalla inapplicabilità della teoria del De Saint Venant ed, in particolare, dalla inconsistenza dell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane su cui si fonda.

Studi sperimentali e numerici hanno evidenziato che nelle travi miste con soletta significativamente larga rispetto alla luce si verificano deformazioni di scorrimento nella stessa che si ingobba e, quindi, le tensioni normali non sono costanti lungo una corda parallela all'asse neutro (Figura 2.6) (si tratta di quello che nella letteratura anglosassone viene indicato come *shear lag*).

Il fenomeno potrebbe essere valutato in linea teorica con procedimenti numerici, ma la normativa si preoccupa di fornire al progettista un metodo veloce e pratico per evitare di sopravvalutare il contributo statico della soletta. Sia quella italiana che quella europea definiscono una *larghezza effettiva* B_{eff} che il linea di principio gode della seguente proprietà:

$$\sigma_1 B_{\text{eff}} = \int_{-B/2}^{B/2} \sigma_z dx \quad (2.22)$$

in cui σ_1 sono le tensioni presenti sull'asse della trave e al secondo membro compare la risultante delle tensioni normali.

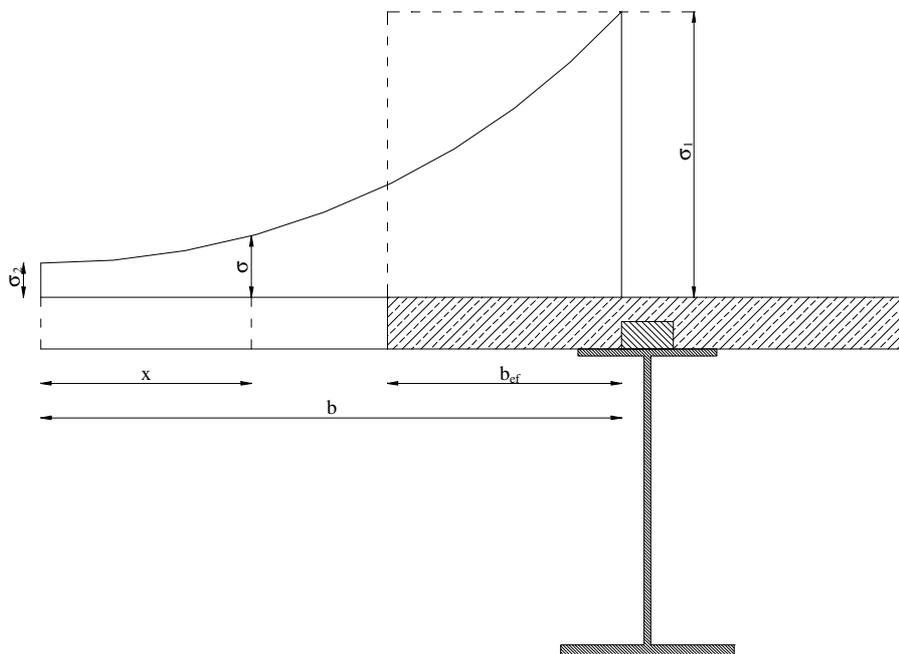


Figura 2.6: distribuzione tipica delle tensioni normali sulla sezione della soletta dovuta allo *shear lag*.

Le differenze tra i due documenti normativi risiedono nella definizione di B_{eff} che nel caso della normativa italiana è data dalla seguente relazione:

$$B_{\text{eff}} = b_{\text{eff},1} + b_{\text{eff},2} + b_c \quad (2.23)$$

in cui b_c è la zona direttamente interessata dai connettori e $b_{\text{eff},1}$ e $b_{\text{eff},2}$ sono ottenute come frazioni delle semilarghezze geometriche tramite un coefficiente η :

$$b_{\text{eff},i} = \eta \cdot b_i \quad (2.24)$$

I coefficienti η sono tabellati per i diversi tipi di schema strutturale e si distingue la fase di analisi (per la quale η è funzione del rapporto b/L e rimane costante per tutta la trave) da quella di verifica delle sezioni nel qual caso vengono trattati separatamente i casi di carico ripartito o concentrato. In quest'ultimo caso i valori di η tendono ad aumentare per sezioni più vicine alla mezzera nelle quali l'effetto degli scorrimenti tende ad uniformarsi. Data la eccessiva complessità di queste prescrizioni vi è una versione semplificata della norma il cui

utilizzo è consentito per strutture di edifici e per travi soggette a carichi principalmente statici per la quale si ha un valore costante per la larghezza effettiva:

$$b_{\text{eff},i} = 0,1 \cdot L \leq b \quad (2.25)$$

La normativa europea segue una logica simile a quest'ultima prescrizione fornendo, però un valore maggiore del rapporto tra larghezza effettiva e luce. La relazione, in generale è del tipo:

$$B_{\text{eff}} = a_{\text{eff},1} + a_{\text{eff},2} \quad (2.26)$$

e, quindi, trascura la larghezza occupata dai connettori. Detta L_0 la luce libera d'inflexione (distanza tra due punti di momento nullo) risulta:

$$a_{\text{eff},i} = L_0 / 8 \leq a \quad (2.27)$$

essendo a la semilarghezza geometrica della sezione.

Pertanto, per sezioni simmetriche e nelle più frequenti applicazioni, le due formulazioni possono così riassumersi:

$$B_{\text{eff}} = \begin{cases} 2 \cdot 0,1 \cdot L + b_c & \text{con } b_{\text{eff}} = 0,1 \cdot L \leq b \\ 2 \cdot 0,125 \cdot L_0 & \text{con } a_{\text{eff}} = 0,125 \cdot L_0 \leq a \end{cases} \quad (2.28)$$

3. TRAVI COMPOSTE CON CONNESSIONE A COMPORTAMENTO LINEARE.

In questo capitolo vengono espone le linee principali della teoria delle travi composte a connessione lineare. In particolare, a partire dall'equazione di Newmark, si calcolano i coefficienti elastici dell'asta composta semplicemente appoggiata e, quindi, viene formulato un "elemento finito" per le travi composte.

In chiusura, poi, vengono, illustrati alcuni casi di applicazione dell'equazione di Newmark per alcuni schemi di trave.

3.1. La teoria di Newmark.

Nonostante il *legame costitutivo* dei connettori non sia mai lineare, il problema del verificarsi degli scorrimenti e, quindi, della deformabilità della connessione è stato affrontato per la prima volta negli anni '40 assumendo l'ipotesi fondamentale di connessione linearmente elastica. In particolare, pressoché contemporaneamente ed in maniera indipendentemente furono elaborati tre modelli caratterizzati soltanto da alcune differenze relative alla individualità o continuità dei connettori [37].

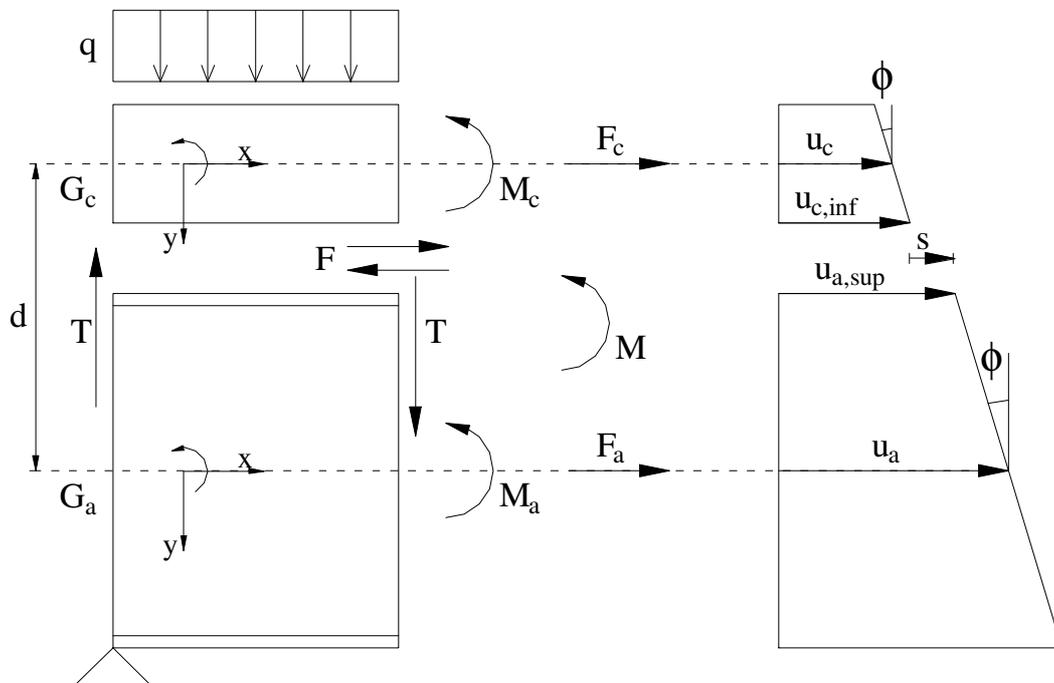


Figura 3.1: caratteristiche della sollecitazione e della deformazione della trave composta a connessione parziale.

Nel seguito si riportano i nomi degli autori cui si devono tali teorie e le principali ipotesi caratteristiche dei diversi modelli:

- Stüssi (Svizzera): il modello consta di un'equazione alle differenze finite per ogni connettore e può essere scritta per travi composte da tre elementi dello stesso materiale o da due di materiale differente;
- Granhölm (Svezia): si ottiene un'equazione differenziale per travi composte da due o tre elementi dello stesso materiale considerando la connessione continua;
- Newmark (USA): deduzione di un'equazione differenziale per travi composte da due elementi di diverso materiale con una connessione continua.

Il modello più confacente al caso delle travi composte da acciaio e calcestruzzo è senz'altro quello di Newmark: nel seguito vengono illustrate sinteticamente i principali risultati di tale teoria.

In primo luogo bisogna modellare la connessione per la quale si fanno due assunzioni fondamentali riguardanti la *continuità* ed il legame costitutivo. La prima ipotesi si può realizzare considerando che risulti:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \frac{P}{i} , \quad (3.1)$$

cioè che la forza per unità di lunghezza $F'(x)$ equivalga al rapporto tra la forza trasmessa da un connettore P ed l'interasse i tra i connettori.

La seconda ipotesi, invece, consiste nella *linearità* del legame tra la forza F e lo scorrimento e si esprime come segue:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = k \cdot s(x) , \quad (3.2)$$

in cui $s(x)$ è lo scorrimento all'ascissa x e k è la rigidezza della connessione, costante lungo la trave (k ha dimensioni $[F] [L]^{-2}$).

Ipotizzando che *le frecce della soletta e del profilato siano uguali in tutti i punti* della trave, è possibile esprimere per congruenza la relazione tra lo scorrimento s e le grandezze che definiscono la deformazione flessionale (Figura 3.1), ottenendo:

$$s = u_{a,\text{sup}} - u_{c,\text{inf}} = u_a - \varphi \cdot d_a - (u_c + \varphi \cdot d_c) , \quad (3.3)$$

nella quale u_a e u_c sono gli spostamenti assiali di acciaio e calcestruzzo, d_a e d_c sono le distanze che separano i baricentri dei due elementi dalla loro interfaccia e φ è la rotazione dei due elementi (assunta uguale per l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane).

Per l'equilibrio devono valere le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} M &= M_a + M_c + F_a \cdot d_a - F_c \cdot d_c , \\ F_c &= -F \\ F_a &= F \end{aligned} \quad (3.4)$$

in cui le grandezze con gli indici "a" e "c" si riferiscono rispettivamente alla parte in acciaio e a quella in calcestruzzo.

Sostituendo le (3.3) nella (3.4) si ottiene:

$$M = \chi [E_c I_c + E_a I_a] + Fd = \chi EI_{\text{abs}} + Fd , \quad (3.5)$$

avendo ritrovato il parametro EI_{abs} , che rappresenta la somma dei due fattori di rigidezza $E_a I_a$ e $E_c I_c$ relativi alle due parti della sezione trasversale.

Dalle (3.3)-(3.5) si ottengono le tre relazioni seguenti:

$$\chi = \frac{M - Fd}{EI_{\text{abs}}} , \quad \varepsilon_a = \frac{F_a}{E_a A_a} = \frac{F}{E_a A_a} \quad \varepsilon_c = \frac{F_c}{E_c A_c} = -\frac{F}{E_c A_c} \quad (3.6)$$

A questo punto è possibile dimostrare che risulta:

$$EI_{\text{full}} = EI_{\text{abs}} + EA^* d^2 , \quad (3.7)$$

avendo posto:

$$EA^* = \frac{E_c A_c \cdot E_a A_a}{E_c A_c + E_a A_a} . \quad (3.8)$$

Sulla base delle ipotesi richiamate sopra e tramite alcuni passaggi di semplificazione è possibile pervenire all'equazione della trave composta. In particolare, tale equazione si può esprimere come segue in termini di scorrimento o di curvatura:

$$\frac{d^2 s}{dx^2} - \alpha^2 s = -\frac{T \cdot d}{EI_{\text{abs}}} , \quad (3.9)$$

$$\chi'' - \alpha^2 \chi = -\alpha^2 \frac{M}{EI_{full}} - \frac{q}{EI_{abs}} \quad (3.10)$$

In entrambe le equazioni compare il parametro α che è definito dalla seguente relazione:

$$\alpha^2 = \frac{k}{EA^*} \frac{EI_{full}}{EI_{abs}} \quad (3.11)$$

Dalla (3.10) si può facilmente constatare che nei casi estremi di comportamento della connessione si ritorna alla consueta equazione della linea elastica. Infatti, per $\alpha L \rightarrow \infty$ (connessione rigida) si ritrova:

$$\chi = \frac{M}{EI_{full}} \Rightarrow \frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q}{EI_{full}} \quad (3.12)$$

mentre per $\alpha L \rightarrow 0$ si ottiene:

$$\chi'' = -\frac{q}{EI_{abs}} \Rightarrow \frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q}{EI_{abs}} \quad (3.13)$$

che rappresenta il legame costitutivo nel caso di connessione completamente inefficace, così come è stato fatto notare nell'esempio con la trave costituita da una sezione formata da due rettangoli.

La (3.10) può essere utilizzata per la soluzione di sistemi staticamente determinati per i quali è possibile determinare il momento flettente M corrispondente al carico q indipendentemente dalle deformazioni e dagli spostamenti che si ottengono.

3.2. Procedure di calcolo per l'analisi di travi composte con connessione lineare.

Le equazioni della trave composta consentono di risalire alle espressioni dei coefficienti elastici nello spirito del *metodo delle forze* e di definire, quindi, una *matrice di deformabilità*.

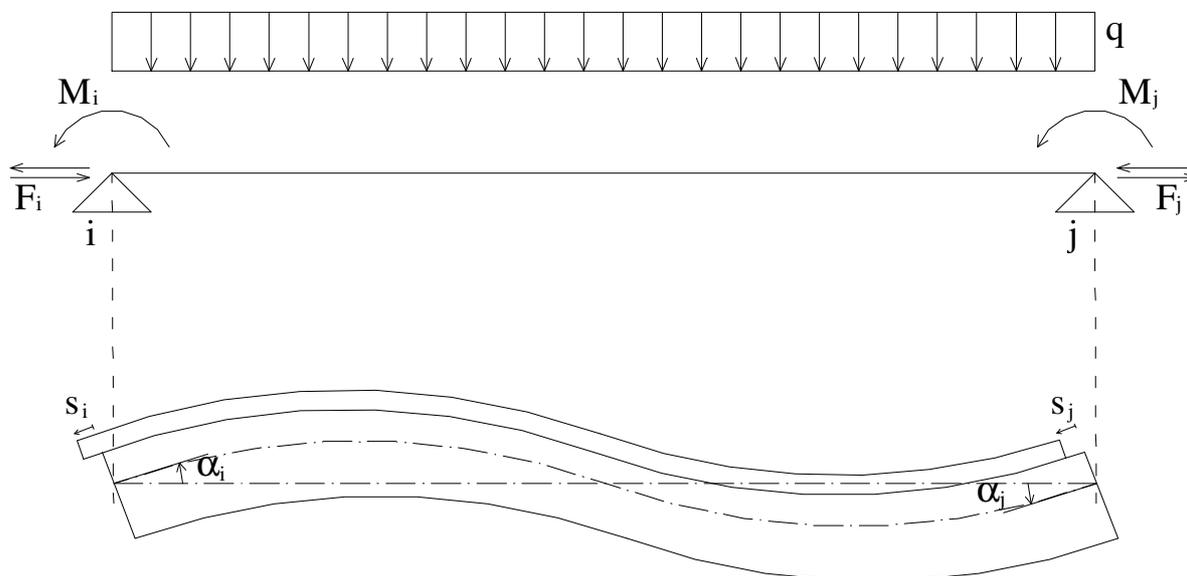


Figura 3.2: asta composta semplicemente appoggiata.

In questo modo è possibile risolvere schemi strutturali iperstatici applicando il suddetto metodo assumendo le incognite iperstatiche con le stesse modalità con le quali si affronta l'analisi delle strutture formate da aste costituite di un unico materiale.

D'altro canto, invertendo la matrice di deformabilità si può ottenere la *matrice di rigidezza* dell'elemento "trave composta": in questo modo è possibile rifluire nell'alveo del

metodo degli spostamenti o, se si vuole, del metodo degli *elementi finiti* con la particolarità di aver formulato un elemento "esatto" avendolo costruito a partire dalle equazioni di Newmark per la trave composta.

Nel seguito si esporranno con un certo dettaglio le fasi della costruzione delle matrici suddette e sarà chiarito il significato meccanico di quanto accennato brevemente nelle righe precedenti.

3.2.1. Costruzione della matrice di deformabilità.

Si è visto che una delle forme nelle quali è possibile esprimere la relazione tra la curvatura e le azioni esterne gravanti sulla trave composta è la seguente:

$$\chi'' - \alpha^2 \cdot \chi = -\frac{q}{EI_{abs}} - \alpha^2 \cdot \frac{M}{EI_{full}} - \frac{k \cdot d \cdot \epsilon_{sh}}{EI_{abs}} . \quad (3.14)$$

con il consueto significato dei simboli ed avendo introdotto anche la deformazione assiale da ritiro ϵ_{sh} .

Il calcolo delle espressioni dei coefficienti di deformabilità si può effettuare a partire dalla (3.14) che deve essere integrata imponendo, di volta in volta, le opportune condizioni al contorno.

In forma matriciale il legame tra "forze" e "spostamenti" per un'asta semplicemente appoggiata si può porre nella forma seguente:

$$\delta_r = D_r \cdot X + \delta_{0,r} . \quad (3.15)$$

in cui il vettore δ raccoglie gli "spostamenti" nodali, δ_0 il valore degli stessi dovuti ai carichi sullo schema isostatico principale e X è il vettore delle azioni nodali; il pedice "r", poi, sottende il fatto che si tratta di vettori ridotti poiché in un secondo momento si dovranno considerare anche il taglio e gli spostamenti ad esso duali.

La (3.16) si può scrivere in maniera più esplicita come segue:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ s_i \\ \alpha_j \\ s_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_i \\ F_i \\ M_j \\ F_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{0,i} \\ s_{0,i} \\ \alpha_{0,j} \\ s_{0,j} \end{bmatrix} . \quad (3.16)$$

avendo fatto riferimento all'asta semplicemente appoggiata della Figura 3.2.

A questo punto bisogna risalire alle espressioni degli elementi della matrice di deformabilità che, proprio a partire dalla (3.16), possono essere identificati come gli spostamenti (generalizzati) dovuti a particolari sistemi di forze agenti sull'asta.

In particolare, la colonna j-esima della matrice di deformabilità raccoglie gli spostamenti nodali dovuti ad un vettore di forze nodali nel quale solo la componente j-esima ha valore non nullo e pari all'unità. Pertanto l'elemento d_{11} coincide con la rotazione dell'estremo i delle trave per effetto di una coppia unitaria ivi applicata: per questo motivo e con evidente significato dei simboli si può porre:

$$d_{11} = \alpha_{i,M_i} . \quad (3.17)$$

Allo stesso modo, l'elemento d_{21} è lo scorrimento che si registra in corrispondenza dell'estremo i per effetto di una coppia unitaria ivi applicata: risulta, pertanto

$$d_{21} = s_{i,M_i} . \quad (3.18)$$

Alla stregua di quanto appena detto e con lo stesso significato dei simboli gli elementi della matrice di deformabilità D_r si possono rappresentare sinteticamente in base alla loro valenza meccanica come segue:

$$\mathbf{D}_r = \begin{bmatrix} \alpha_{i,M_i} & \alpha_{i,F_i} & \alpha_{i,M_j} & \alpha_{i,F_j} \\ s_{i,M_i} & s_{i,F_i} & s_{i,M_j} & s_{i,F_j} \\ \alpha_{j,M_i} & \alpha_{j,F_i} & \alpha_{j,M_j} & \alpha_{j,F_j} \\ s_{j,M_i} & s_{j,F_i} & s_{j,M_j} & s_{j,F_j} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

A questo punto si possiedono tutti gli elementi per la costruzione della matrice di deformabilità della trave mista semplicemente appoggiata.

Per quanto s'è detto si può procedere con il *metodo delle colonne* caricando la trave in maniera da ottenere proprio gli spostamenti che corrispondono ai vari elementi della colonna in questione.

3.2.1.1. Elementi della prima colonna.

Per ottenere gli elementi della prima colonna bisogna considerare un vettore \mathbf{X} delle forze nodali la cui prima componente abbia valore unitario e le cui altre componenti siano nulle. Pertanto si deve assumere:

$$M_i = 1, \quad F_i = 0, \quad M_j = 0, \quad F_j = 0, \quad (3.20)$$

e calcolare gli spostamenti generalizzati che si ottengono in corrispondenza dei due nodi.

La valutazione di tali spostamenti si può condurre con l'ausilio del *metodo della forza unitaria* che può vedersi come una particolare applicazione del *principio dei lavori virtuali*.

$$\alpha_{i,M_i} = \frac{L}{3EI_{abs}} \cdot \psi_1 + \frac{L}{3EI_{full}} \cdot (1 - \psi_1), \quad (3.21)$$

avendo posto:

$$\psi_1 = 3 \cdot \left[\frac{\cosh(\alpha L)}{\alpha L \cdot \sinh(\alpha L)} - \frac{1}{(\alpha L)^2} \right]. \quad (3.22)$$

Dalla (3.21) si può desumere che la rotazione si calcola interpolando tra quelle che si otterrebbero in caso di connessione rigida o assente, essendo ψ_1 compreso tra 0 ed 1.

In maniera analoga è possibile valutare il terzo elemento della prima colonna di \mathbf{D}_r che, per quanto si è detto, corrisponde alla rotazione che si registra nell'estremo j per effetto di una coppia unitaria applicata in i . Risultata:

$$\alpha_{i,M_i} = \frac{L}{6EI_{abs}} \cdot \psi_2 + \frac{L}{6EI_{full}} \cdot (1 - \psi_2), \quad (3.23)$$

avendo posto:

$$\psi_2 = 6 \cdot \left[\frac{1}{(\alpha L)^2} - \frac{1}{\alpha L \cdot \sinh(\alpha L)} \right]. \quad (3.24)$$

A questo punto, per completare la prima colonna si devono determinare le espressioni degli scorrimenti d'estremità causati dall'applicazione di una coppia unitaria in corrispondenza dell'estremo i .

Applicando le solite procedure di calcolo si può pervenire alle espressioni riportate di seguito:

$$s_{i,M_i} = s(0) = \frac{d \cdot L}{EI_{abs}} \cdot \left[\frac{1}{(\alpha L)^2} - \frac{\cosh(\alpha L)}{\alpha L \cdot \sinh(\alpha L)} \right] = -\frac{d \cdot L}{3EI_{abs}} \cdot \psi_1, \quad (3.25)$$

$$s_{j,M_i} = s(L) = \frac{d \cdot L}{EI_{abs}} \cdot \left[\frac{1}{(\alpha L)^2} - \frac{1}{\alpha L \cdot \sinh(\alpha L)} \right] = \frac{d \cdot L}{6EI_{abs}} \cdot \psi_2. \quad (3.26)$$

Per concludere l'esposizione del procedimento di costruzione della prima colonna della matrice \mathbf{D}_r si riporta in Figura 3.3 l'andamento delle funzioni ψ_1 e ψ_2 per le quali si nota uno

sviluppo qualitativamente analogo che giustifica quanto detto sul fatto che la curvatura possa vedersi come interpolazione di quelle dei due casi estremi di connessione rigida o assente.

La stessa figura consente, inoltre, anche di accertarsi che gli scorrimenti sarebbero nulli se la connessione fosse rigida.

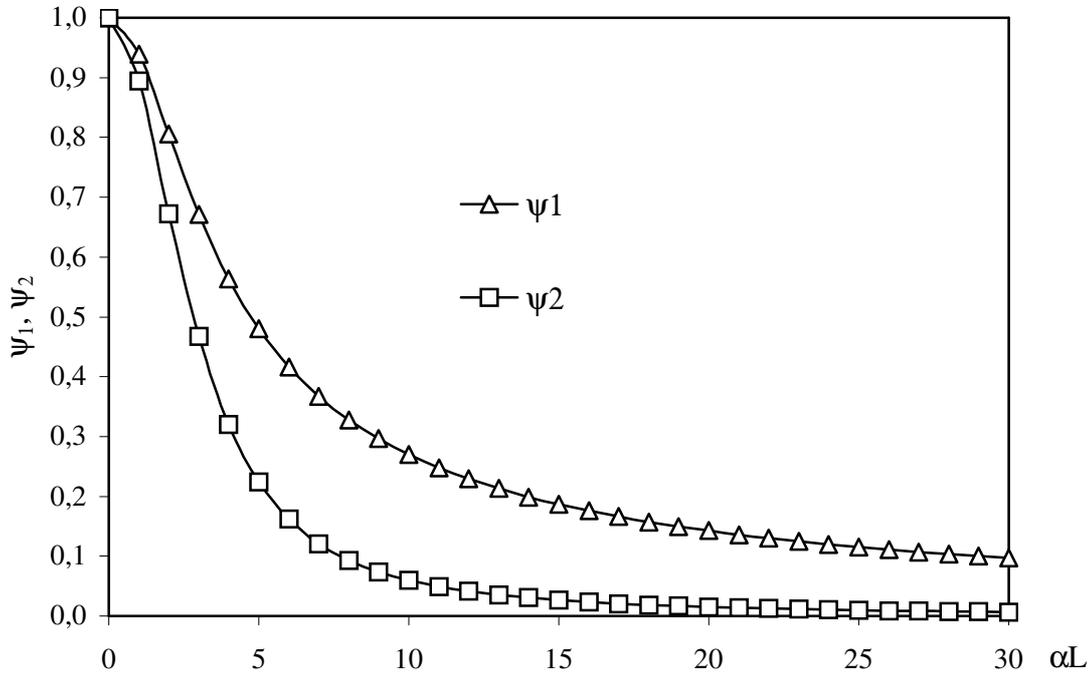


Figura 3.3: andamento delle funzioni ψ_1 e ψ_2 .

3.2.1.2. Elementi della seconda colonna.

Per la determinazione degli elementi della seconda colonna ci si deve riferire ad una condizione di carico caratterizzata dai seguenti valori delle forze nodali:

$$M_i = 0, \quad F_i = 1, \quad M_j = 0, \quad F_j = 0. \quad (3.27)$$

A questo punto la determinazione delle espressioni dei coefficienti elastici si potrebbe condurre come per quelli della prima colonna.

D'altronde, però, il teorema di Betti consente di asserire che la matrice D_r è simmetrica e, dunque,

$$\alpha_{i,F_i} = d_{12} = d_{21} = s_{i,M_i}. \quad (3.28)$$

Inoltre, per la simmetria dello schema, non può che risultare:

$$s_{i,M_i} = s_{j,M_j}, \quad (3.29)$$

e, dunque, ancora per il teorema di Betti:

$$\alpha_{j,F_j} = d_{32} = d_{23} = s_{j,M_j} = s_{i,M_i}. \quad (3.30)$$

Restano, dunque, da determinare le espressioni dei due scorrimenti d'estremità dovuti alla forza unitaria applicata in corrispondenza dell'estremo i. Applicando il PLV con le solite modalità e tramite alcuni passaggi di semplificazione è possibile esprimere gli scorrimenti che si verificano ai due estremi come segue:

$$s_{i,F_i} = \frac{d^2L}{EI_{abs}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{EI_{abs}}{EI_{full}}} \cdot \psi_3 \quad s_{j,F_j} = \frac{d^2L}{EI_{abs}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{EI_{abs}}{EI_{full}}} \cdot \psi_4, \quad (3.31)$$

avendo posto:

$$\psi_3 = \frac{\cosh(\alpha L)}{\alpha L \cdot \sinh(\alpha L)} \qquad \psi_4 = \frac{1}{\alpha L \cdot \sinh(\alpha L)} \quad (3.32)$$

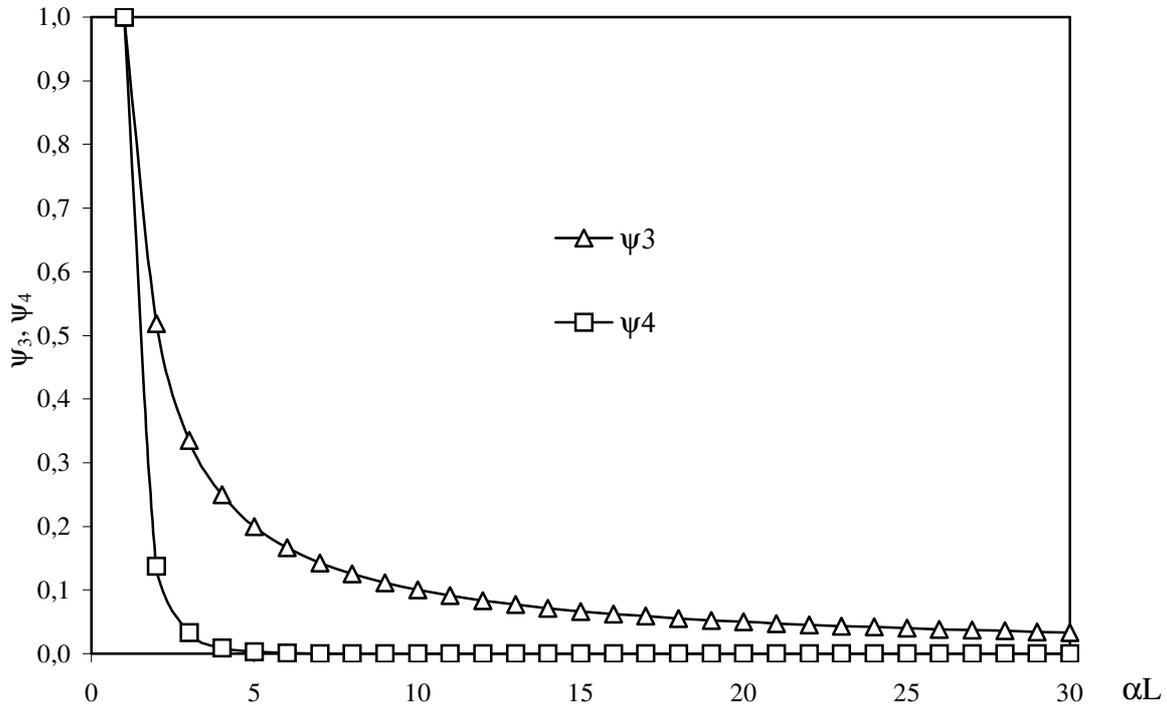


Figura 3.4: andamento delle funzioni ψ_3 e ψ_4 .

Nella Figura 3.4 sono rappresentate le funzioni ψ_3 e ψ_4 e si vede che esse divergono per $\alpha L \rightarrow 0$: infatti, se non ci fosse la connessione non si potrebbe avere equilibrio sotto la condizione di carico considerata. Inoltre, emerge anche l'importanza di un altro parametro, cioè del rapporto EI_{abs}/EI_{full} : per ovvie ragioni esso è sempre minore dell'unità e, quindi, il fattore

$$\frac{1}{1 - \frac{EI_{abs}}{EI_{full}}}, \quad (3.33)$$

rappresenta un coefficiente amplificativo dello scorrimento legato alle caratteristiche della sezione ed indipendente dal grado di connessione.

In particolare, si può osservare che all'aumentare del rapporto EI_{abs}/EI_{full} aumenta lo scorrimento a parità di valore del parametro αL . In realtà, però, lo scorrimento non risente della sola influenza diretta del rapporto EI_{abs}/EI_{full} , ma dipende da esso anche indirettamente poiché anche lo stesso αL dipende dal rapporto in oggetto.

3.2.1.3. Completamento della matrice D_r .

Avendo determinato la espressione degli elementi delle prime due colonne si può completare l'intera matrice utilizzando le proprietà di simmetria della stessa. Infatti, per il teorema di Betti si può asserire che le prime due righe sono uguali alle prime due colonne.

In questo modo rimangono da determinare solo gli elementi comuni alle ultime due righe e colonne che costituiscono il blocco 2x2 disposto in basso a destra.

In quanto a tali elementi, la simmetria della trave consente di uguagliarli a quelli del blocco formato dall'intersezione tra le prime due righe e le prime due colonne.

Pertanto, definite le due matrici seguenti:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI_{abs}} \cdot \psi_1 + \frac{L}{3EI_{full}} \cdot (1 - \psi_1) & -\frac{d \cdot L}{3EI_{abs}} \cdot \psi_1 \\ -\frac{d \cdot L}{3EI_{abs}} \cdot \psi_1 & \frac{d^2 L}{EI_{abs}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{EI_{abs}}{EI_{full}}} \cdot \psi_3 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{L}{6EI_{abs}} \cdot \psi_2 - \frac{L}{6EI_{full}} \cdot (1 - \psi_2) & \frac{d \cdot L}{6EI_{abs}} \cdot \psi_2 \\ \frac{d \cdot L}{6EI_{abs}} \cdot \psi_2 & \frac{d^2 L}{EI_{abs}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{EI_{abs}}{EI_{full}}} \cdot \psi_4 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

la matrice di deformabilità \mathbf{D}_r si presenta nella seguente forma a blocchi:

$$\mathbf{D}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{A} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

3.2.2. Espressione del vettore $\delta_{r,0}$.

Con criteri analoghi a quelli seguiti per la costruzione della matrice \mathbf{D}_r è possibile costruire il vettore degli "spostamenti" dovuti ai "carichi" che gravano sulla trave semplicemente appoggiata.

In particolare si considereranno gli effetti di un carico uniformemente ripartito q e di una deformazione assiale ϵ_{sh} imposta dal ritiro sulla soletta.

In generale si ha:

$$\delta_{r,0} = [\alpha_{i,0}, s_{i,0}, \alpha_{j,0}, s_{j,0}]^T, \quad (3.37)$$

con il consueto significato dei simboli e, per la simmetria dello schema statico e dei "carichi", devono valere le seguenti uguaglianze tra le varie componenti del vettore:

$$\alpha_{i,0} = -\alpha_{j,0} \quad s_{i,0} = -s_{j,0}. \quad (3.38)$$

Inoltre, dovendo considerare le due azioni cui si è fatto cenno sopra, si conviene di porre:

$$\delta_{r,0} = \delta_{r,q} + \delta_{r,sh}, \quad (3.39)$$

risolvendo prima il problema relativo al carico uniformemente ripartito e, quindi, analizzando gli effetti deformativi della deformazione da ritiro.

3.2.2.1. Contributo $\delta_{r,q}$ dovuto al carico ripartito.

Risolvendo l'equazione di Newmark con riferimento allo schema semplicemente appoggiato e per un carico uniformemente ripartito q ed applicando il PLV, si può porre:

$$\psi_5 = \frac{24}{(\alpha L)^3} \cdot \left[\frac{1 - \cosh(\alpha L)}{\sinh(\alpha L)} + \frac{\alpha L}{2} \right], \quad (3.40)$$

ed esprimere la rotazione $\alpha_{i,q}$ tramite la seguente relazione:

$$\alpha_{0,q,i} = -\frac{qL^3}{24EI_{abs}} \cdot \psi_5 - \frac{qL^3}{24EI_{full}} \cdot (1 - \psi_5). \quad (3.41)$$

Quanto agli scorrimenti, i valori che questi assumono alle estremità della trave si possono esprimere come segue:

$$s_{0,q,i} = s(0) = \frac{qL^3 d}{24EI_{abs}} \cdot \psi_5, \quad (3.42)$$

Ricordando la (3.38), gli spostamenti nel secondo estremo si devono ritenere opposti a quelli calcolati con riferimento ad i e, quindi, il vettore $\delta_{0,r}$ è completamente determinato.

3.2.3. Contributo $\delta_{r,sh}$ dovuto al ritiro.

Il fatto di considerare il ritiro nella formulazione di un metodo di analisi per le travi composte è assai importante per gli effetti tensionali che questo implica sulla struttura e, nel caso in questione non richiede particolare difficoltà.

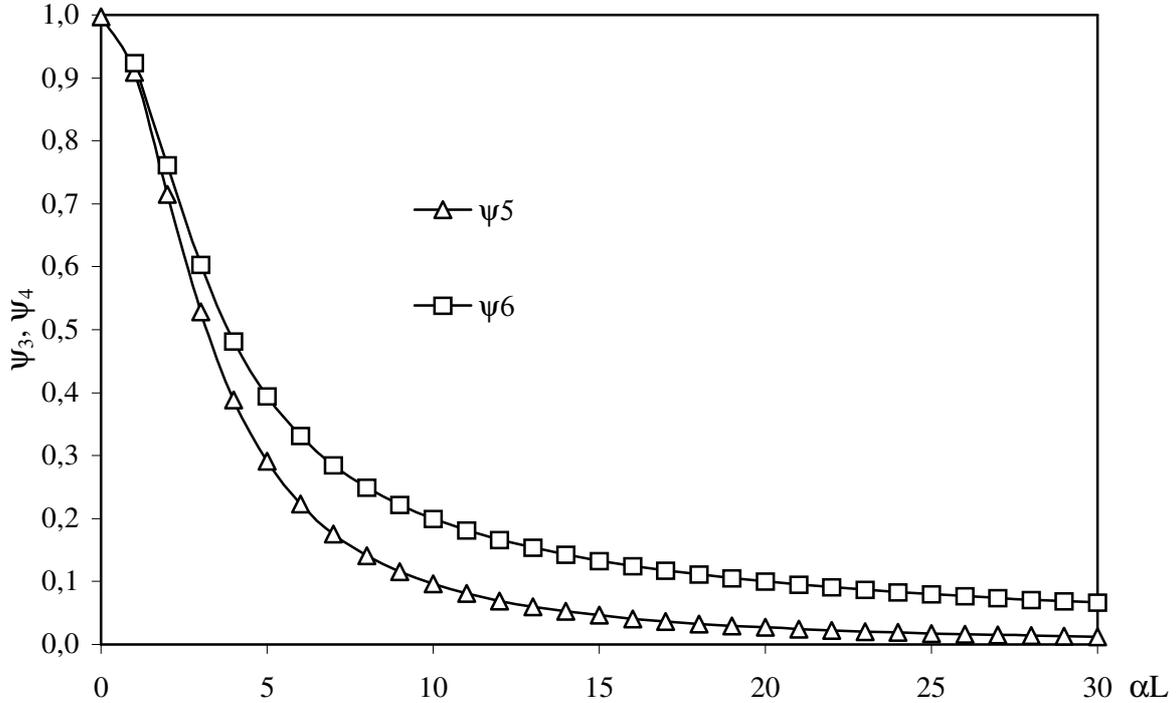


Figura 3.5: andamento delle funzioni ψ_5 e ψ_6 .

Bisogna risolvere la (3.14) con riferimento al solo termine legato alla deformazione da ritiro e, quindi, ottenuta l'espressione della curvatura, si deve procedere applicando il PLV e calcolando gli spostamenti rilevanti.

Definito il seguente parametro:

$$\psi_6 = 2 \cdot \frac{\cosh(\alpha L) - 1}{\alpha L \cdot \sinh(\alpha L)}, \quad (3.43)$$

le rotazioni in questione possono esprimersi nella forma che segue:

$$\alpha_{r,sh,i} = -\alpha_{r,sh,j} = -\frac{EA^* d \cdot L}{2EI_{full}} \cdot \epsilon_{sh} \cdot (1 - \psi_6), \quad (3.44)$$

Quanto agli scorrimenti d'estremità si trova la seguente espressione:

$$s_{r,sh,i} = -s_{r,sh,j} = \frac{L\epsilon_{sh}}{2} \cdot \psi_6, \quad (3.45)$$

in cui il primo fattore rappresenta lo scorrimento in assenza di connessione.

L'andamento dei parametri ψ_5 e ψ_6 in funzione di αL è rappresentato nella Figura 3.5.

3.2.4. Costruzione della matrice di rigidezza K .

Nelle pagine precedenti è stato illustrato con un certo dettaglio il procedimento per la determinazione dei coefficienti elastici che costituiscono la matrice di deformabilità (ridotta) D_r per l'asta composta semplicemente appoggiata agli estremi.

Volendo, ora, proporre una formulazione alternativa del problema bisogna pensare di invertire la matrice \mathbf{D}_r al fine di ottenere la matrice di rigidezza \mathbf{K}_r che consente di affrontare l'analisi di strutture iperstatiche nello spirito del *metodo degli spostamenti*. L'operazione di inversione può essere condotta sia per via analitica, considerando un caso del tutto generale, che per via numerica con riferimento ai valori che gli elementi della matrice \mathbf{D}_r assumono con riferimento ad un particolare caso di studio.

I risultati che si ottengono nel primo caso constano di espressioni piuttosto complicate dal punto di vista formale, la cui esposizione richiede un certo spazio e non contribuirebbe ad una chiara illustrazione della formulazione dell'"*elemento finito*" di trave composta a connessione lineare. Tuttavia, per "vedere" i termini della matrice \mathbf{K}_r e per tentare di darne anche una interpretazione meccanica, sarà dedicato un paragrafo a parte per l'esposizione delle espressioni degli elementi di tale matrice.

Per il momento si pensi di aver invertito la matrice \mathbf{D}_r tramite uno dei metodi forniti dall'analisi numerica e di aver ottenuto la matrice \mathbf{K}_r rappresentabile simbolicamente nella forma seguente:

$$\mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} k_{r,11} & k_{r,12} & k_{r,13} & k_{r,14} \\ k_{r,21} & k_{r,22} & k_{r,23} & k_{r,24} \\ k_{r,31} & k_{r,32} & k_{r,33} & k_{r,34} \\ k_{r,41} & k_{r,42} & k_{r,43} & k_{r,44} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

In termini operativi il vantaggio che si ottiene ricorrendo al metodo degli spostamenti piuttosto che a quello delle forze consiste nella possibilità di discretizzare anche la singola asta e senza essere legati allo schema dell'elemento semplicemente appoggiato che finora è stato considerato. Per ottenere questo risultato è necessario disporre della matrice di rigidezza \mathbf{K} dell'asta libera la quale si può ottenere completando la \mathbf{K}_r . Inoltre, anche i vettori degli spostamenti e delle forze dovranno essere completati dalle forze taglianti T_i e T_j e dagli spostamenti ad esse duali v_i e v_j (Figura 3.6):

$$\boldsymbol{\delta} = [v_i \quad \alpha_i \quad s_i \quad v_j \quad \alpha_j \quad s_j]^T \quad \mathbf{Q} = [T_i \quad M_i \quad F_i \quad T_j \quad M_j \quad F_j]^T. \quad (3.47)$$

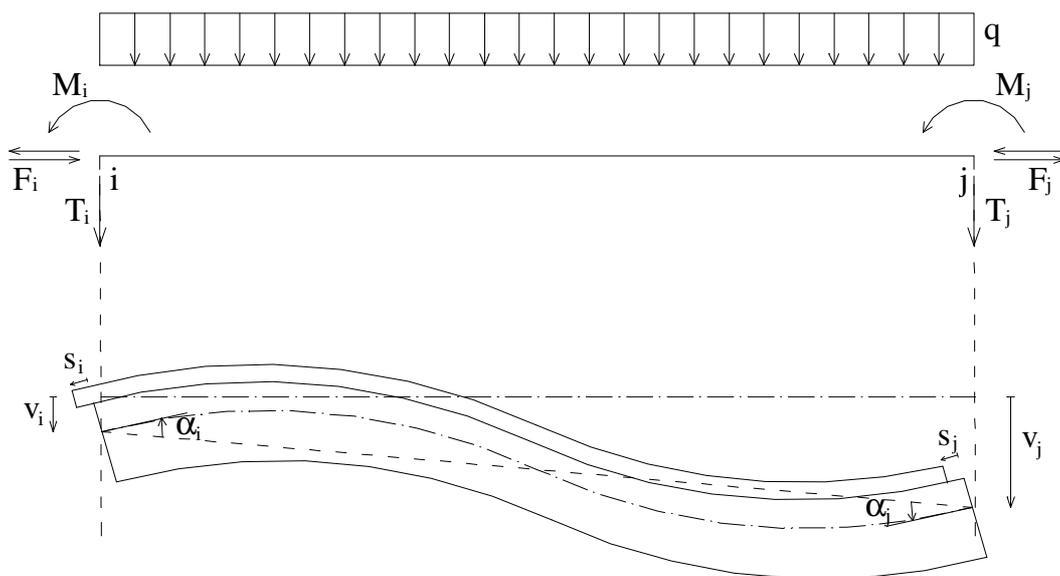


Figura 3.6: definizione degli enti forza e spostamento dell'asta libera composta.

A partire da \mathbf{K}_r e tramite semplici considerazioni di equilibrio dell'asta è possibile esprimere la matrice \mathbf{K} nella seguente forma simbolica:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

con le seguenti proprietà:

- gli elementi relativi a rotazioni e scorrimenti sono gli stessi di quelli riportati in \mathbf{K}_r (si tratta degli elementi che si trovano nelle posizioni che possono ottenersi per intersezione delle righe e delle colonne seconda, terza, quinta e sesta);
- per rimanenti elementi (appartenenti alle righe e colonne prima e quarta) valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} k_{12} = k_{21} = -k_{42} = -k_{24} = -k_{15} = -k_{51} = k_{45} = k_{54} &= -\frac{k_{22} + k_{52}}{L}, \\ k_{13} = k_{31} = -k_{43} = -k_{34} = -k_{16} = -k_{61} = k_{46} = k_{64} &= -\frac{k_{23} + k_{53}}{L}, \\ k_{11} = -k_{41} = -k_{14} = k_{44} &= -\frac{k_{21} + k_{51}}{L}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

In quanto alle reazioni di incastro perfetto $\mathbf{Q}_{0,r}$, si può partire dal vettore $\boldsymbol{\delta}_{0,r}$ e, poiché per la (3.15) deve risultare:

$$\mathbf{D}_r \cdot \mathbf{Q}_{0,r} + \boldsymbol{\delta}_{0,r} = \mathbf{0}, \quad (3.50)$$

si ha:

$$\mathbf{Q}_{0,r} = -\mathbf{D}_r^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}_{0,r}. \quad (3.51)$$

Anche in questo caso, volendo considerare l'azione combinata del carico e del ritiro si può ricorrere alle espressioni degli elementi dei due vettori $\boldsymbol{\delta}_{0,r,q}$ e $\boldsymbol{\delta}_{0,r,sh}$ ed ottenere, secondo la (3.51) le corrispondenti azioni di incastro perfetto $\mathbf{Q}_{0,r,q}$ e $\mathbf{Q}_{0,r,sh}$.

Anche per le azioni di incastro perfetto bisogna espandere il vettore in forma ridotta ed inserire i termini dovuti al taglio al fine di renderlo compatibile con la matrice di rigidezza \mathbf{K} . La determinazione di tali termini è davvero semplice dal momento che, per l'equilibrio dell'asta i termini dovuti al carico sono in tutto analoghi a quelli che si hanno per l'asta semplice, mentre quelli legato al ritiro sono nulli (infatti il momento che si genera è costante).

In definitiva il vettore delle azioni di incastro perfetto si presenta nella forma seguente:

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_{0,q} + \mathbf{Q}_{0,sh} = \begin{bmatrix} -qL/2 \\ (\mathbf{Q}_{0,q,r})_1 \\ (\mathbf{Q}_{0,q,r})_2 \\ -qL/2 \\ (\mathbf{Q}_{0,q,r})_3 \\ (\mathbf{Q}_{0,q,r})_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (\mathbf{Q}_{0,q,sh})_1 \\ (\mathbf{Q}_{0,q,sh})_2 \\ 0 \\ (\mathbf{Q}_{0,q,sh})_3 \\ (\mathbf{Q}_{0,q,sh})_4 \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Anche per gli elementi del vettore delle azioni di incastro perfetto saranno, comunque, riportate e commentate le espressioni analitiche in un apposito paragrafo.