Prima esercitazione progettuale
Progetto di un solaio laterocementizio

Analisi delle sollecitazioni con il Metodo delle Forze

1. Definizione dei coefficienti di deformabilità;
2. Soluzione della trave continua che schematizza il solaio.

ANALISI DELLE SOLLECITAZIONI.
– METODO DELLE FORZE –

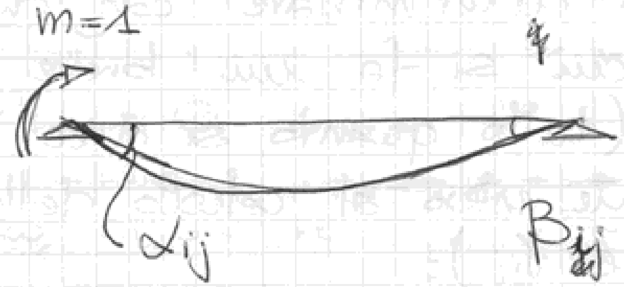
1. DEFINIZIONE DEI PARAMETRI DI DEFORMABILITÀ.

Con riferimento ad una trave semplicemente appoggiata è necessario definire i PARAMETRI DI DEFORMABILITÀ.

Poiché il calcolo di tale coefficienti ed, in generale, la formulazione del Metodo delle Forze per l'analisi delle strutture sarà oggetto di una parte specifica del corso, si parte dalla definizione dei PARAMETRI DI DEFORMABILITÀ per la trave semplicemente appoggiata con riferimento ai carichi di interesse per la soluzione della TRAVE CONTINUA che schematizza il solaio.

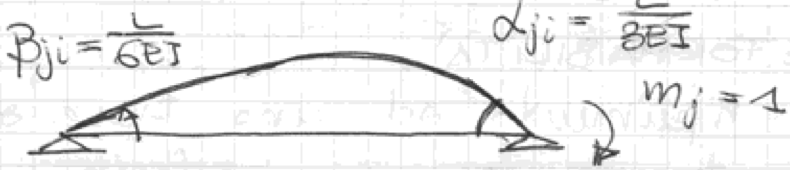
Occorre definire le seguenti grandezze

- rotazioni dovute ad una coppia unitaria in i



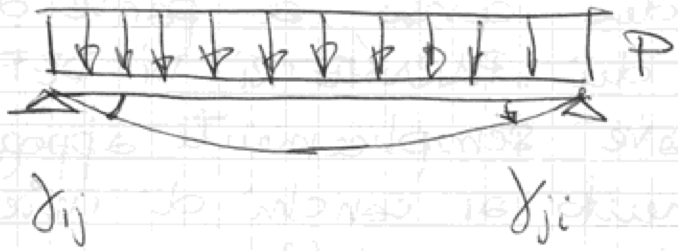
$$\alpha_{ij} = \frac{L}{3EI} \qquad \beta_{ij} = -\frac{L}{6EI}$$

- rotazioni dovute ad una coppia unitaria applicata in j.



$$\alpha_{ji} = \frac{L}{3EI} \qquad \beta_{ji} = -\frac{L}{6EI}$$

- rotazioni dovute al carico uniformemente ripartito p.



$$\gamma_{ij} = \frac{pL^3}{24EI} \qquad \gamma_{ji} = -\frac{pL^3}{24EI}$$

I valori α_{ij}, α_{ji} e β $\left(\beta = |\beta_{ij}| = |\beta_{ji}|\right)$ si dicono COEFFICIENTI DI DEFORMABILITÀ e si possono determinare con diverse metodologie cui si fa un breve cenno nel seguito (tutto quanto si dice però essere ovviamente esteso al calcolo delle rotazioni γ_{ij} e γ_{ji}):

- <u>METODO ANALITICO</u>: consiste nel risolvere l'equazione differenziale della linea elastica

$$v^{IV} = \frac{p(z)}{EI}$$

la cui soluzione completa, nel caso di carico costante (ed inerzia costante) è

$$v(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \frac{p}{24EI} z^4$$

~~Ad esempio, con riferimento al caso della coppia nodale~~ Vanno imposte opportune condizioni al contorno per il calcolo della soluzione con riferimento alle condizioni di vincolo e di carico della trave.

Ad esempio, nel caso della coppia nodale si deve assumere $p=0$ ed imporre le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ -EIv''(0) = -1 \\ v(L) = 0 \\ -EIv''(L) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo, si ottiene

$$v(z) = -\frac{1}{6EI}\frac{z^3}{L} + \frac{1}{2EI} z^2 - \frac{L}{3EI} z$$

da cui

$$\varphi(z) = -\frac{dv}{dz} = \frac{z^2}{2EIL} - \frac{z}{EI} + \frac{L}{3EI}$$

Pertanto

$$\alpha_{ij} = \varphi(0) = \frac{L}{3EI}$$

$$\beta_{ij} = \varphi(L) = -\frac{L}{6EI}$$

Il caso con la coppia sull'estremo opposto si risolve in maniera del tutto analoga mentre per le rotazioni dovute al carico bisogna imporre le seguenti condizioni al contorno

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ -EIv''(0) = 1 \\ v(L) = 0 \\ -EIv''(L) = 0 \end{cases}$$

- METODO "VARIAZIONALE": IL calcolo dei coefficienti di ~~[illegible]~~ deformabilità può essere condotto anche utilizzando il METODO DELLA FORZA UNITARIA che deriva dal PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI COMPLEMENTARE. Dato lo schema ~~[illegible]~~ di carico in oggetto (ad esempio, la trave caricata con la coppia in unitaria in i), si considera uno <u>schema ausiliario</u> caricato con una "forza" nodale che sia "duale" allo "spostamento" che si vuole determinare.

$$M = 1 - \frac{z}{L} \qquad\qquad M_1 = 1 - \frac{z}{L}$$

<u>SCHEMA AUSILIARIO</u>

Ad esempio, volendo ottenere la <u>rotazione</u> in i lo schema ausiliario ~~consistent~~ deve essere caricato con una <u>coppia</u> unitaria in i. A questo punto imponendo l'uguaglianza tra lavoro esterno ed interno calcolato considerando spostamenti e deformazioni dello schema di riferimento e forze e sollecitazioni di quello ausiliario si ha

$$1 \cdot \alpha_{ij} = \int_0^L \chi \cdot M_1 \, dz$$

da cui

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 dz = \frac{L}{3EI} .$$

– UTILIZZO DEI COROLLARI DI MOHR:

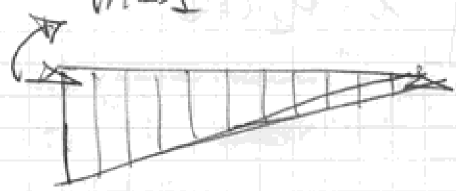
il teorema di Mohr stabilisce che gli abbassamenti di una trave (la trave "reale") sono equivalenti a quelli del momento M^* della trave ausiliaria il cui carico è definito dal diagramma delle ~~defor~~ curvature della trave reale.

Da tale teorema derivano il ~~seg~~ seguente corollario:

le ROTAZIONI nodali sono pari ai valori del taglio T^* della trave ausiliaria.

Per questo motivo le rotazioni terminali sono pari alle reazioni degli appoggi sulla trave ausiliaria.

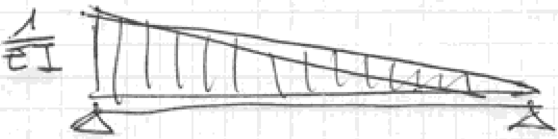
Ad esempio, con riferimento al caso della coppia nodale in i lo schema reale è il seguente



$$M(z) = 1 - \frac{z}{L}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

Se si considera ora il sistema ausiliario si ottiene



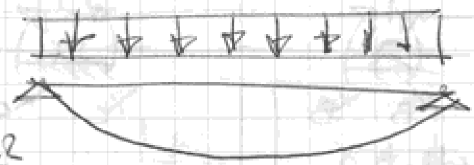
da cui è possibile ottenere le rotazioni all'estremità

$$\alpha_{ij} = T^*_{ij} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{EI}\cdot\frac{L}{2} = \frac{L}{3EI}$$

$$\beta_{ij} = T^*_{ji} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{EI}\cdot\frac{L}{2} = \frac{L}{6EI}$$

Anche per le rotazioni indotte dal carico si può facilmente ottenere il seguente risultato:

— SISTEMA "REALE"



$$M = \frac{p}{2}z - \frac{pz^2}{2}$$

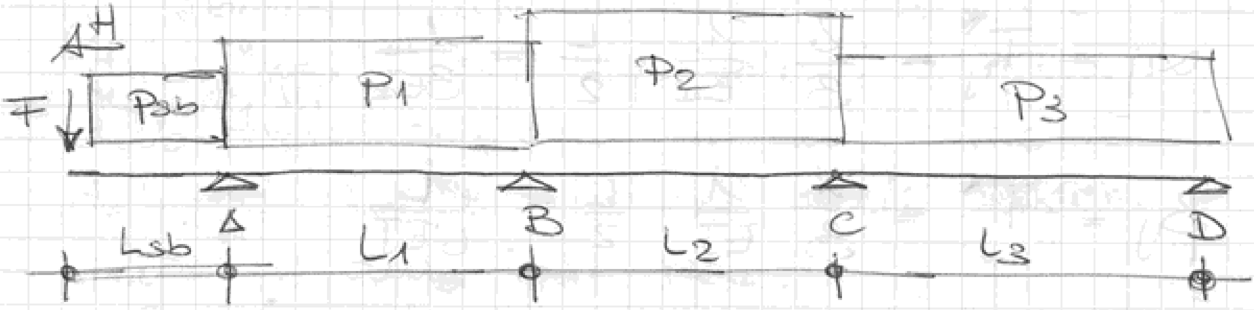
$$\chi(z) = M(z)/EI$$

— SISTEMA AUSILIARIO

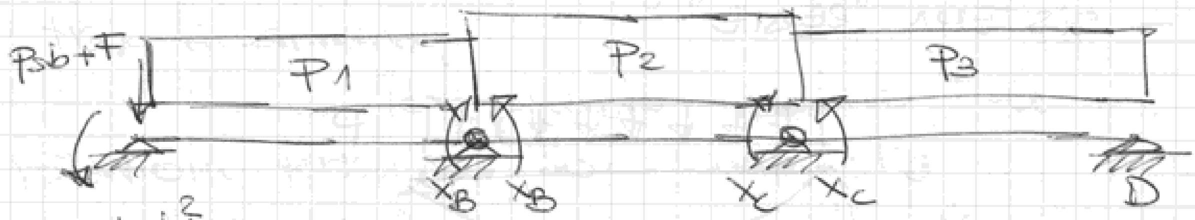
$$|\gamma_{ij}| = T^*_{ij} = \frac{1}{2}\cdot\frac{qL^2}{8EI}\cdot\frac{2}{3}\cdot L = \frac{qL^3}{24EI}$$

$$|\gamma_{ji}| = T^*_{ji} = \frac{1}{2}\,\frac{qL^2}{8EI}\,\frac{2}{3}L = \frac{qL^3}{24EI}$$

2. SOLUZIONE DELLO SCHEMA DI TRAVE CONTINUA.



Si considera lo schema isostatico ~~per~~ ASSOCIATO introducendo le due incognite iperstatiche X_B ed X_C



$$M = \frac{p_{sb} \cdot L_{sb}^2}{2} + F \cdot L_{sb} + H \cdot h$$

Sullo schema isostatico tutti i valori delle X_B e X_C danno luogo a soluzioni equilibrate. All'interno di queste – nello spirito del metodo delle forze – bisogna ricercare la coppia di valori di X_B ed X_C che per i quali si ha anche la congruenza delle travi ovvero la ... uguaglianza delle rotazioni in B e C.

$$\varphi_{BC} - \varphi_{BA} = 0$$

$$\varphi_{CD} - \varphi_{CB} = 0$$

Risulta, assumendo positive le rotazioni orarie,

$$\varphi_{BC} = -\frac{X_B L_{BC}}{3EI} - \frac{X_C L_{BC}}{6EI} + \frac{p_2 L_{BC}^3}{24EI}$$

$$\varphi_{BA} = \frac{X_B L_{AB}}{3EI} + \frac{m L_{AB}}{6EI} - \frac{p_1 L_{AB}^3}{24EI}$$

$$\varphi_{CD} = -\frac{X_C L_{CD}}{3EI} + \frac{p_3 L_{CD}^3}{24EI}$$

$$\varphi_{CB} = \frac{X_C L_{CB}}{3EI} + \frac{X_B L_{BC}}{6EI} - \frac{p_2 L_{BC}^3}{24EI}$$

In forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{L_{AB}}{3} + \frac{L_{BC}}{3} & \frac{L_{BC}}{6} \\ \frac{L_{BC}}{6} & \frac{L_{BC}}{3} + \frac{L_{CD}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ X_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_1 L_{AB}^3}{24} + \frac{p_2 L_{BC}^3}{24} - \frac{m L_{AB}}{6} \\ \frac{p_2 L_{BC}^3}{24} + \frac{p_3 L_{CD}^3}{24} \end{bmatrix}$$

La precedente scrittura matriciale può essere proposta in forma simbolica come segue

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{X} = \underline{\delta_0}$$

essendo

$\underline{\underline{D}}$ la matrice di Deformabilità del sistema.

$\underline{X}$ il vettore delle incognite iperstatiche

$\underline{\delta_0}$ il vettore che raccoglie l'entità delle rotazioni dovute ai carichi esterni nei punti B e C del sistema isostatico associato.

La soluzione del problema può dunque porsi nei termini seguenti:

$$\underline{X} = [\underline{D}]^{-1} \cdot \underline{\delta_0}$$

La matrice di deformabilità D (e la sua inversa) sono indipendenti dalla combinazione di carico. Al contrario ad ogni combinazione di carico corrisponde un valore del vettore $\underline{\delta_0}^{comb}$.

Pertanto, calcolata una volta l'inversa della matrice D si può ottenere la soluzione del sistema per ogni combinazione

$$\underline{X}^{COMB} = [\underline{D}]^{-1} \cdot \underline{\delta_0}^{COMB}$$