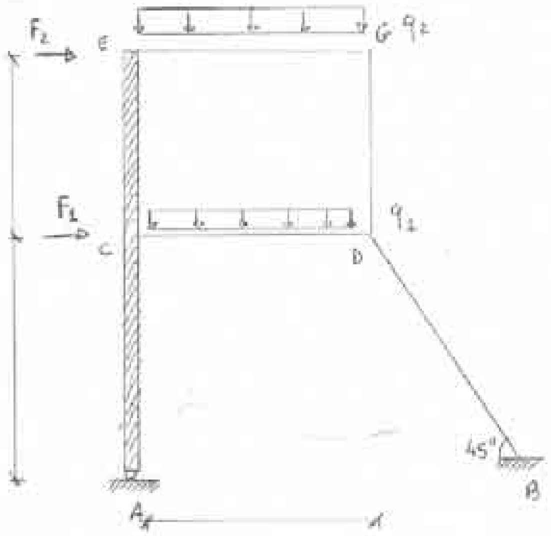
Analisi delle sollecitazioni su **Strutture intelaiate piane**

Telaio a due piani a maglie generiche con la presenza di un tratto infinitamente rigido (soluzione secondo il Metodo dei Vincoli Ausiliari).

APPLICAZIONE DEL METODO DEI VINCOLI AUSILIARI.



$H_1 = 3500$ mm.

$H_2 = 4000$ mm

$L = 5000$ mm

$q_1 = q_2 = 50$ kN/m

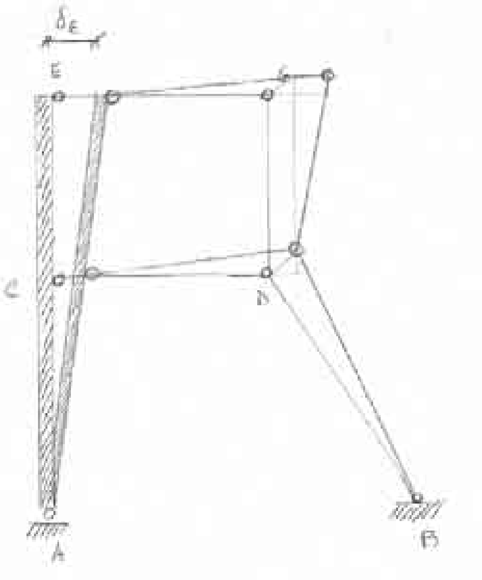
travi: 30x60 cm

pilastri: 30x50 cm

$F_2 = 200$ kN

$F_1 = 100$ kN

Per definire il tipo di struttura (se a nodi fissi o a nodi spostabili) bisogna considerare il grado di labilità della struttura reticolare associata.

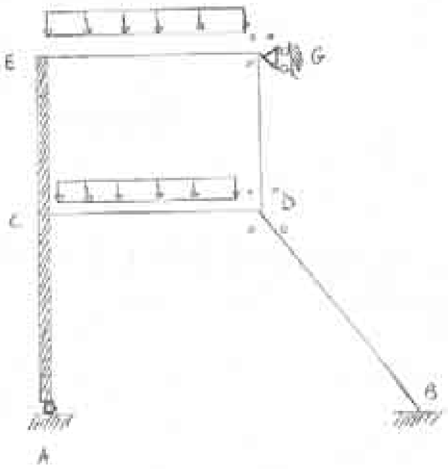


Essendo la struttura reticolare associata una volta labile, le incognite sono δ_E, φ_G, φ_D.

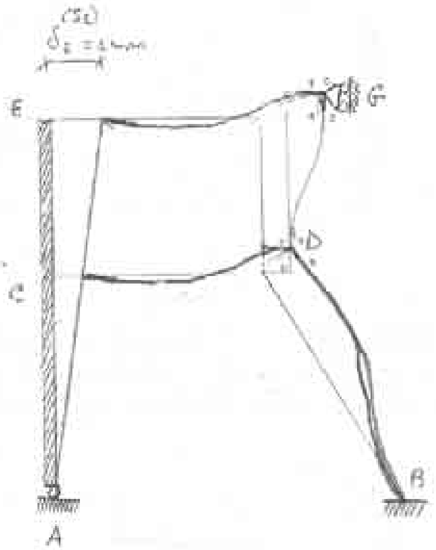
$$\varphi_C = \varphi_E = \frac{\delta_E}{H_1 + H_2} \quad ; \quad \delta_C = \frac{H_1}{H_1 + H_2}\,\delta_E$$

Per la risoluzione della struttura col metodo di Cross è necessario risolvere lo schema S_0 (a nodi resi fissi mediante morsetti in D e G), S_1 (con carrello in G traslato, ad esempio, di 1 mm), calcolare le reazioni dell'appoggio ausiliario in G nei 2 schemi ed imporre la relazione:

$$R_G^{(S_0)} + \alpha R_G^{(S_1)} = 0$$



S_0



S_1

CALCOLO DELLE RIGIDEZZE

Posto

$$E_c = 9500\,(f_{ck}+8)^{1/3} = 9500\,(20+8)^{1/3} = 28847.6 \text{ MPa}$$

si possono valutare le rigidezze delle varie aste.

ASTA BD

$$W_{BD} = \frac{4EI_p}{L_{BD}} = \frac{4\cdot 28847.6 \cdot 300\cdot 500^3/12}{3500\sqrt{2}} = 7.28512\cdot 10^{10}\text{ Nmm}$$

$$W_{DB} = W_{BD}$$

$$V_{BD} = V_{DB} = \frac{2EI_p}{L_{BD}} = 3.64256\cdot 10^{10}\text{ Nmm}$$

$$U_{BD} = \frac{W_{BD}+V_{BD}}{L_{BD}} = 2.20772\cdot 10^{7}\text{ N}$$

$$U_{DB} = U_{BD} = 2.20772\cdot 10^{7}\text{ N}$$

ASTA CD

$$W_{CD} = \frac{4EI_p}{L} = \frac{4\cdot 28847.6\cdot 300\cdot 600^3/12}{5000} = 1.24622\cdot 10^{11}\text{ Nmm}$$

$$W_{DC} = W_{CD} = 1.24622\cdot 10^{11}\text{ Nmm}$$

$$V_{CD} = V_{DC} = \frac{2EI_p}{L} = 6.23108\cdot 10^{10}\text{ Nmm}$$

$$U_{CD} = \frac{6EI_p}{L^2} = 3.73865\cdot 10^{7}\text{ N}$$

$$U_{DC} = U_{CD} = 3.73865\cdot 10^{7}\text{ N}$$

ASTA EG

$$W_{EG} = W_{GE} = \frac{4EI_p}{L} = 1.24622\cdot 10^{11}\text{ Nmm}$$

$$V_{EG} = V_{GE} = \frac{2EI_p}{L} = 6.23108\cdot 10^{10}\text{ Nmm}$$

$$U_{EG} = U_{GE} = \frac{6EI_p}{L^2} = 3.73865\cdot 10^{7}\text{ N}$$

ASTA DG

$$W_{DG} = W_{GD} = \frac{4EI_p}{H_2} = \frac{4 \cdot 28847.6 \cdot 300 \cdot 500^3/12}{4000} = 9.01487 \cdot 10^{10}\ Nmm$$

$$V_{DG} = V_{GD} = \frac{2EI}{H_2} = 4.50744 \cdot 10^{10}\ Nmm$$

$$U_{DG} = U_{GD} = \frac{6EI}{H_2^2} = 3.38058 \cdot 10^{7}\ N$$

CALCOLO DEI COEFFICIENTI DI RIPARTIZIONE NEI NODI D E G.

- NODO G

$$\tau_{GE} = \frac{W_{GE}}{W_{GE} + W_{GD}} = 0.580$$

$$\tau_{GD} = \frac{W_{GD}}{W_{GE} + W_{GD}} = 0.520$$

- NODO D

$$\tau_{DG} = \frac{W_{DG}}{W_{DG} + W_{DB} + W_{DC}} = 0.314$$

$$\tau_{DB} = \frac{W_{DB}}{W_{DG} + W_{DB} + W_{DC}} = 0.253$$

$$\tau_{DC} = \frac{W_{DC}}{W_{DG} + W_{DB} + W_{DC}} = 0.433$$

COEFFICIENTI DI TRASPORTO

Su tutte le aste flessibili risulta $v_{ji}/w_{ij} = 1/2$ e dunque $t_{ij} = 1/2$.

SCHEMA A NODI FISSI (S_0)

Calcolo dei momenti di incastro perfetto

ASTA CD

$$\mu_{CD} = -\frac{q_1 \cdot L^2}{12} = -1.04167 \cdot 10^8 \text{ N mm}$$
$$= -104.17 \text{ kNm}$$

$$\mu_{DC} = \frac{q_1 L^2}{12} = 104.17 \text{ kNm}$$

ASTA EG

$$\mu_{EG} = -\frac{q_2 L^2}{12} = -104.17 \text{ kNm}$$

$$\mu_{GE} = \frac{q_2 L^2}{12} = 104.17 \text{ kNm}$$

Si riporta nel seguito la risoluzione dello schema a nodi fissi secondo il Metodo di Hardy-Cross.

S_0 schema a nodi fissi

M_{GE} = 51,466 KNm

M_{GD} = -51,469 KNm

M_{DG} = -45,707 KNm

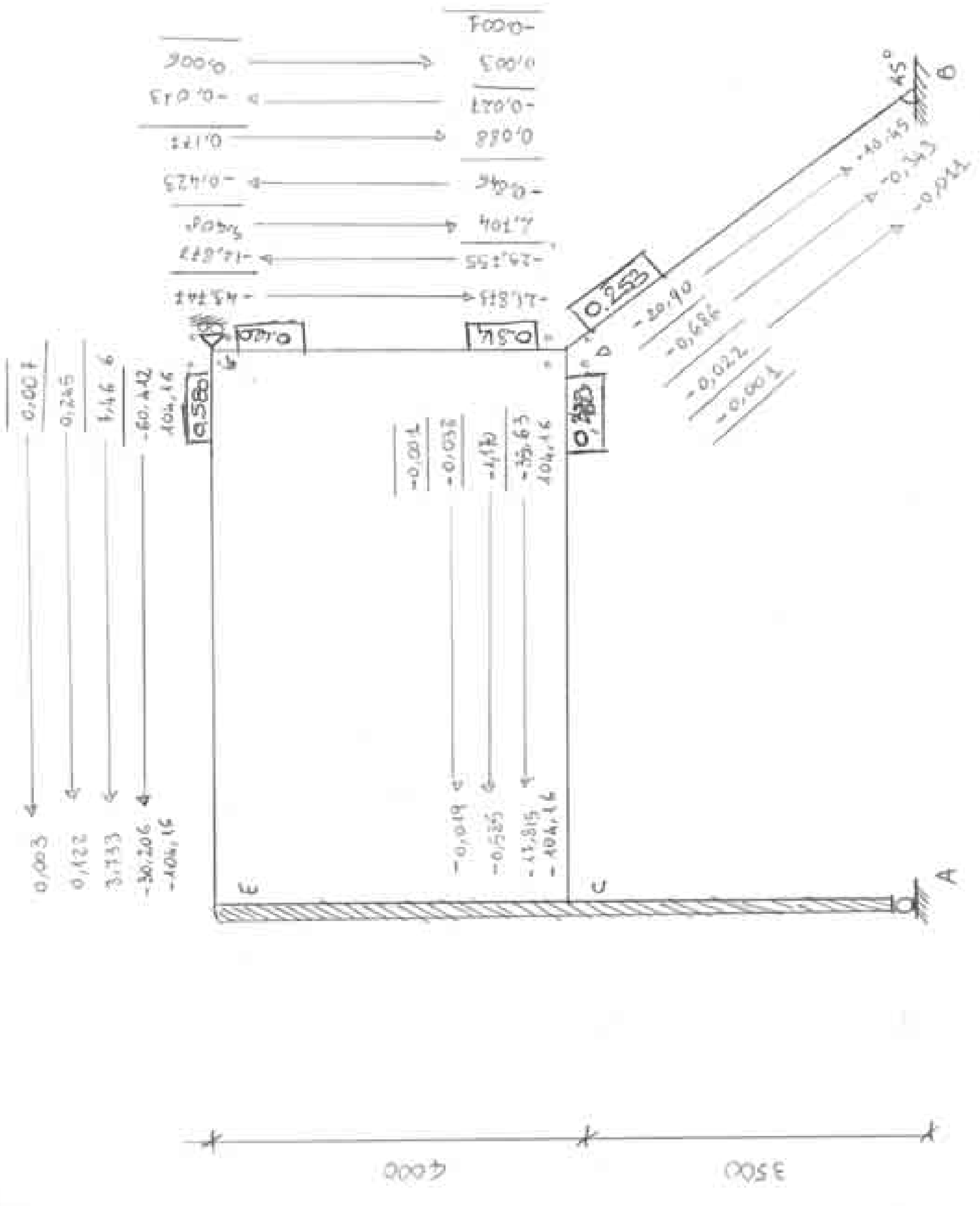
M_{DC} = 64,321 KNm

M_{DB} = -21,609 KNm

M_{EG} = -130,508 KNm

M_{CD} = -122,579 KNm

M_{BD} = -10,804 KNm



Avendo determinato i momenti agli estremi delle aste deformabili è possibile valutare anche il taglio:

ASTA BD

$$T_{BD} = -\frac{M_{BD} + M_{DB}}{L_{BD}} = -\frac{-10.80 - 21.61}{3.50 \cdot \sqrt{2}} = 6.55\ KN$$

$$T_{DB} = T_{BD} = 6.55\ KN$$

ASTA DG

$$T_{DG} = -\frac{M_{DG} + M_{GD}}{H_2} = -\frac{-45.71 - 51.17}{4.00} = 24.22\ KN$$

$$T_{GD} = T_{DG} = 24.22\ KN$$

ASTA CD

$$T_{CD} = \frac{q_1 L}{2} - \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L} = \frac{50 \cdot 5}{2} - \frac{-122.56 + 67.32}{5} = 136.05\ KN$$

$$T_{DC} = -\frac{q_1 L}{2} - \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L} = -113.95\ KN$$

ASTA EG

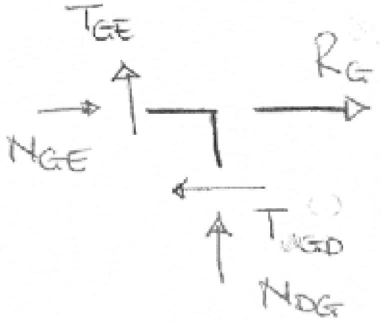
$$T_{EG} = \frac{q_2 L}{2} - \frac{M_{EG} + M_{GE}}{L} = \frac{50 \cdot 5}{2} - \frac{-130.51 + 51.47}{5} = 140.81\ KN$$

$$T_{GE} = -\frac{q_2 L}{2} - \frac{M_{EG} + M_{GE}}{L} = -109.19\ KN$$

Noti i valori del taglio è ~~...~~ possibile valutare gli sforzi normali nelle aste e, soprattutto, la reazione $R_G^{(0)}$ del vincolo ausiliario.
Bisogna innanzitutto ricercare le condizioni per determinare queste entità, scrivendo ~~...~~ equazioni

di equilibrio alla traslazione per i vari nodi.

NODO G



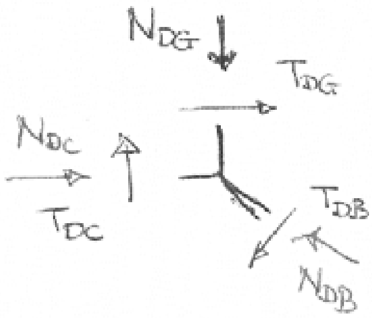
Si possono scrivere le due seguenti equazioni

$$\underline{N_{GE}} + \underline{R_G} - T_{GD} = 0 \qquad (1)$$

$$-\underline{N_{DG}} - T_{GE} = 0 \qquad (2)$$

nelle quali risultano coinvolte tre incognite. Si devono scrivere, dunque, altre equazioni per chiudere il problema.

Nodo D



Altre due equazioni derivano dall'equilibrio alla traslazione del nodo D:

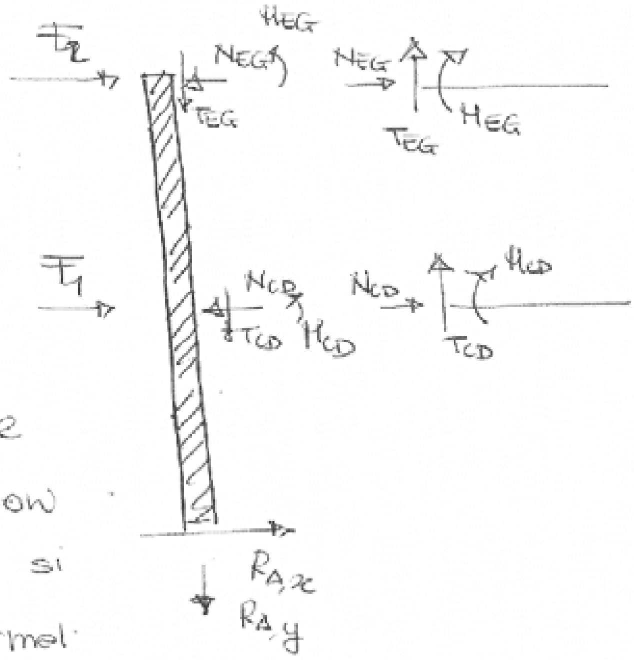
$$\underline{N_{DC}} + T_{DG} - T_{DB}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{DB}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (3)$$

$$+\underline{N_{DG}} + T_{DC} + T_{DB}\frac{\sqrt{2}}{2} - \underline{N_{DB}}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (4)$$

Altre due incognite sono state coinvolte in queste equazioni e, dunque, il numero totale di incognite è pari a 5: occorre un'altra equazione per "chiudere" il problema.

Non potendo scrivere altri equilibri nodali senza chiamare in causa altre incognite (i tagli dei tratti rigidi, ad esempio) si ricerca questa equazione in un equilibrio globale del tratto rigido. In particolare, si considera l'equilibrio del tratto ACE alla rotazione intorno al punto A: il diagramma di corpo libero per il tratto ACE è rappresentato nella figura.

Risulta:



$$N_{EG}(H_1+H_2)+N_{CD}\,H_1+M_{EG}+M_{CD}-F_1\cdot H_1-F_2(H_1+H_2)=0 \quad (5)$$

A questo punto il problema è chiuso e sostituendo nelle relazioni (1)-(5) i valori $T_{ij}^{(0)}$ si ottengono gli sforzi normali $N_{ij}^{(0)}$ e $R_G^{(0)}$ sullo schema S_0.

Risulta

$$R_G^{(0)} = 62.96\ KN$$

$$N_{GE}^{(0)} = -38.74\ KN$$

$$N_{DC}^{(0)} = 208.18\ KN$$

$$N_{DB}^{(0)} = 322.12\ KN$$

$$N_{DG}^{(0)} = 109.19\ KN$$

dove, coerentemente con la convenzione assunta nella scrittura delle equazioni, gli sforzi normali positivi sono di compressione.

ASTA EG

La traslazione negativa vale

$$\delta_{EG} = -\frac{H_1}{H_1+H_2}\,\delta_G = -0.167 \text{ mm}$$

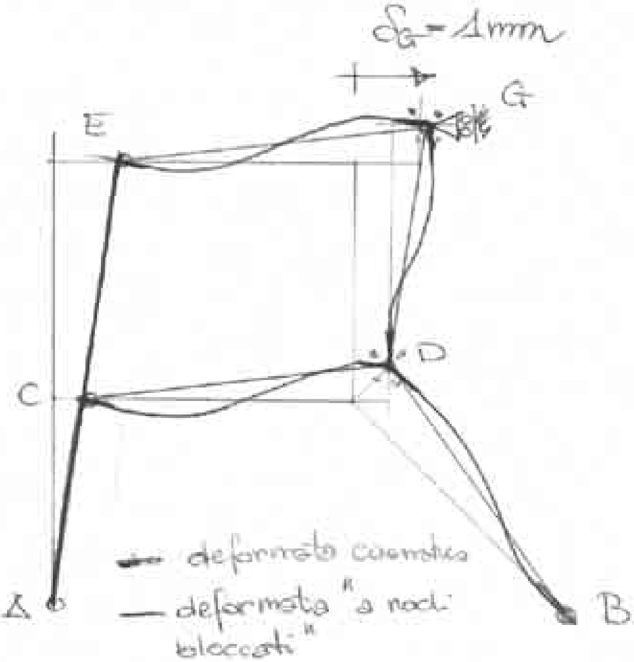
ed anche la rotazione in E è pari a quella in G.
Pertanto si ha

$$M_{EG} = W_{EG} \cdot \varphi_E - U_{EG}\,\delta_{EG} = 34.06 \text{ kNm}$$

$$M_{GE} = V_{GE}\,\varphi_E - U_{GE}\,\delta_{EG} = 25.75 \text{ kNm}$$

SCHEMA A NODI TRASLATI S_1

Nella figura a lato si riporta la deformata cinematica e quella a nodi bloccati (dai morsetti posti nei nodi D e G). Con riferimento a quest'ultima vanno calcolati i momenti di incastro perfetto sulle aste flessibili.



ASTA DB

Lo spostamento trasversale subito dall'asta vale

$$\delta_{DB} = +\sqrt{2}\,\delta_C = -\sqrt{2}\,\frac{H_1}{H_2+H_2}\cdot\delta_G$$

ovvero

$$\delta_{DB} = 0.660 \text{ mm}$$

da cui

$$\mu_{DB} = -U_{DB}\cdot\delta_{DB} = -1.457\cdot 10^7 \text{ Nmm} = -14.57 \text{ kNm}$$

$$\mu_{BD} = \mu_{DB} = -14.57 \text{ kNm}$$

ASTA DG

L'asta subisce una traslazione trasversale dei nodi pari a

$$\delta_{DG} = \frac{H_2}{H_1+H_2}\,\delta_G = 0.533 \text{ mm}$$

da cui

$$\mu_{DG} = -U_{DG}\cdot\delta_{DG} = -1.803\cdot10^7 \text{ Nmm} = -18.03 \text{ kNm}$$

$$\mu_{GD} = \mu_{DG} = -18.03 \text{ kNm}$$

ASTA CD

La traslazione dei nodi vale

$$\delta_{CD} = -\frac{H_1}{H_1+H_2}\,\delta_G = -0.167 \text{ mm}$$

e l'asta subisce anche una rotazione in C pari a

$$\varphi_C = \frac{\delta_G}{H_1+H_2} = \frac{1}{7.5\cdot10^3} = 1.333\cdot10^{-4}$$

Pertanto

$$\mu_{CD} = W_{CD}\cdot\varphi_C - U_{CD}\cdot\delta_{CD} = 34.06 \text{ kNm}$$

$$\mu_{DC} = V_{DC}\,\varphi_C - U_{DC}\cdot\delta_{CD} = 25.75 \text{ kNm}$$

ASTA EG

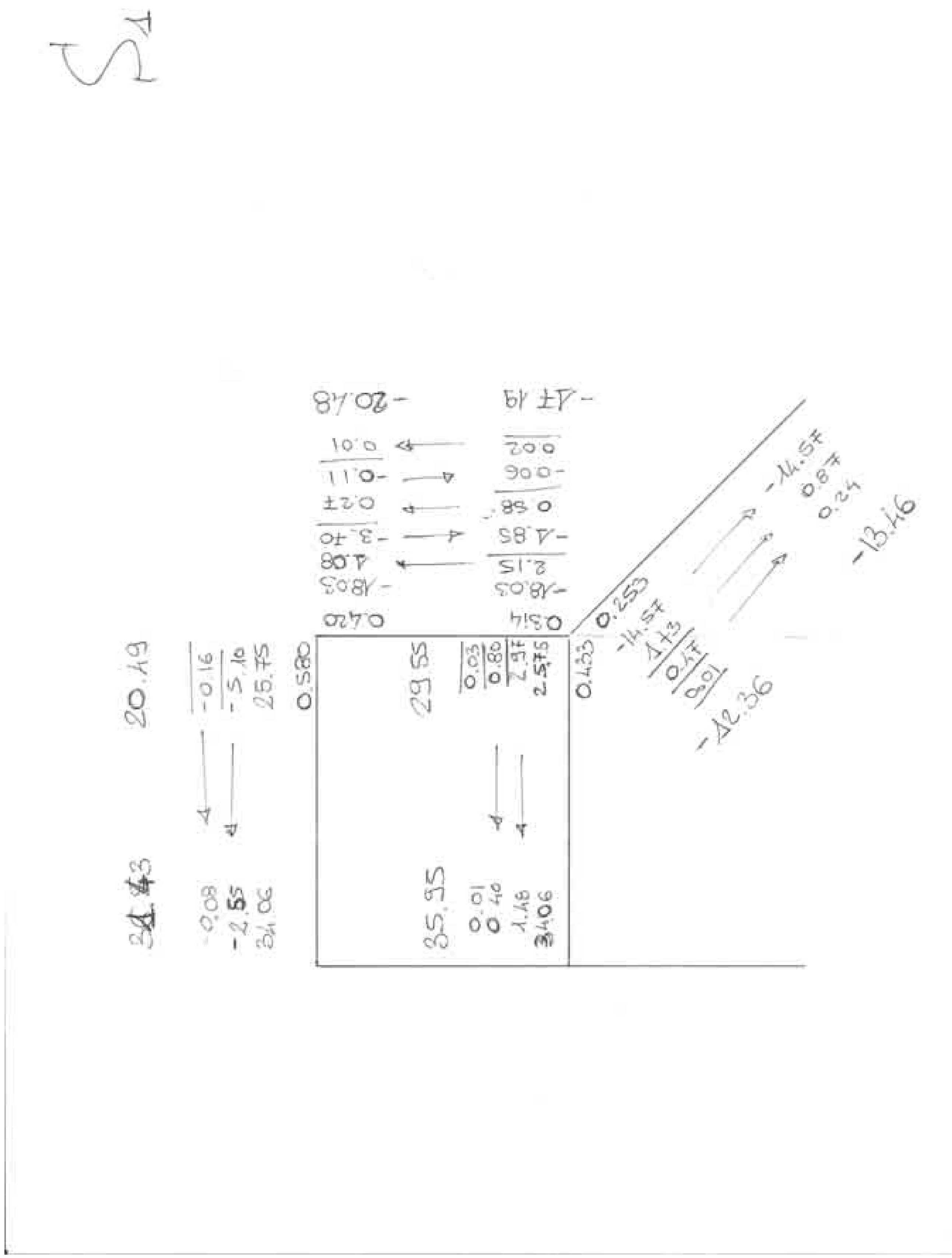
La traslazione negativa vale

$$\delta_{EG} = -\frac{H_1}{H_1+H_2}\,\delta_G = -0.167 \text{ mm}$$

ed anche la rotazione in E è pari a quella in G.
Pertanto si ha

$$M_{EG} = W_{EG}\cdot\varphi_E - U_{EG}\,\delta_{EG} = 34.06 \text{ kNm}$$

$$M_{GE} = V_{GE}\,\varphi_E - U_{GE}\,\delta_{EG} = 25.75 \text{ kNm}$$



Anche per lo schema S_1 si possono valutare dapprima i valori nodali del taglio :

ASTA BD

$$T_{BD} = -\frac{M_{BD}+M_{DB}}{L_{BD}} = -\frac{-12.36-13.46}{3.5\sqrt{2}} = 5.22 \text{ kN}$$

$$T_{DB} = T_{BD} = 5.22 \text{ kN}$$

ASTA CD

$$T_{CD} = -\frac{M_{CD}+M_{DC}}{L} = -\frac{35.95+29.55}{5} = -13.10 \text{ kN}$$

$$T_{DC} = +T_{CD} = -13.10 \text{ kN}$$

ASTA DG

$$T_{DG} = -\frac{M_{DG}+M_{GD}}{H_2} = -\frac{-20.48-17.19}{4.0} = 9.42 \text{ kN}$$

$$T_{GD} = T_{DG} = 9.42 \text{ kN}$$

ASTA EG

$$T_{EG} = -\frac{M_{EG}+M_{GE}}{L} = -\frac{31.43+20.49}{5} = -10.38 \text{ kN}$$

$$T_{GE} = T_{EG} = -10.38 \text{ kN}$$

Utilizzando le stesse relazioni (1)-(5) si ottengono i valori di $R_G^{(1)}$ e $N_{ij}^{(1)}$ per lo schema S_1.

Risulta

$$R_G^{(1)} = 28.410 \text{ kN}$$

$N_{GE}^{(1)} = -18.99$ KN

$N_{DC}^{(1)} = 21.44$ KN

$N_{DB}^{(1)} = 38.43$ KN

$N_{DG}^{(1)} = 10.38$ KN

$M_{CE}^{(1)} = -44.58$ KNm

$M_{CA}^{(1)} = 8.58$ KNm

$T_{AC}^{(1)} = T_{CA}^{(1)} = -\frac{M_{CA}}{H_1} = 2{,}45$ kN

CALCOLO DEL VALORE NUMERICO DEL PARAMETRO DI COMBINAZIONE α.

Dovendo risultare

$$R_G = R_G^{(0)} + \alpha R_G^{(1)} = 0 \implies \alpha = -\frac{R_G^{(0)}}{R_G^{(1)}} = -\frac{62.96}{28.41} =$$

$$= -2.216$$

da cui si evince che lo spostamento della struttura δ vale

$$\delta_E = \bar{\delta}_E \cdot \alpha = 1\text{ mm} \cdot (-2.216) = -2.216\text{ mm}$$

che è praticamente uguale a quello ottenuto risolvendo lo stesso problema secondo il Metodo degli Spostamenti.

Il calcolo della generica caratteristica della sollecitazione CS_{ij} si ottiene come segue

$$CS_{ij} = CS_{ij}^{(0)} + \alpha\, CS_{ij}^{(1)}$$

Nel seguito si riportano i valori ottenuti per i momenti

ASTA AC

$$M_{CA} = M_{CA}^{(0)} + \alpha M_{CA}^{(1)} = 488.03 - 2.216 \cdot (-8.58) = 469.02 \text{ KNm}$$

ASTA BD

$$M_{BD} = M_{BD}^{(0)} + \alpha M_{BD}^{(1)} = 19.02 \text{ KNm}$$

$$M_{DB} = M_{DB}^{(0)} + \alpha M_{DB}^{(1)} = 5.87 \text{ KNm}$$

ASTA CD

$$M_{CD} = M_{CD}^{(0)} + \alpha M_{CD}^{(1)} = -202.25 \text{ KNm}$$

$$M_{DC} = M_{DC}^{(0)} + \alpha M_{DC}^{(0)} = -1.83 \text{ KNm}$$

ASTA CE

$$M_{CE} = M_{CE}^{(0)} + \alpha M_{CE}^{(1)} = -365.47 + (-2.216) \cdot (-44.53) = -266.79 \text{ KNm}$$

$$M_{EC} = M_{EC}^{(0)} + \alpha M_{EC}^{(1)} = 130.51 - 2.216 \cdot (-31.43) = 200.16 \text{ KNm}$$

ASTA DG

$$M_{DG} = M_{DG}^{(0)} + \alpha M_{DG}^{(1)} = 7.61 \text{ KNm}$$

$$M_{GD} = M_{GD}^{(0)} + \alpha M_{GD}^{(1)} = 6.08 \text{ KNm}$$

ASTA EG

$$M_{EG} = M_{EG}^{(0)} + \alpha M_{EG}^{(1)} = -200.16 \text{ KNm}; \quad M_{GE} = M_{GE}^{(0)} + \alpha M_{GE}^{(1)} = 6.06 \text{ KNm}$$

Il confronto di questi valori con i corrispondenti ottenuti tramite il MdS mostra che le differenze sono compatibili con le tolleranze ammesse nel procedimento di equilibrio alla Cross sugli schemi S_0 ed S_1.