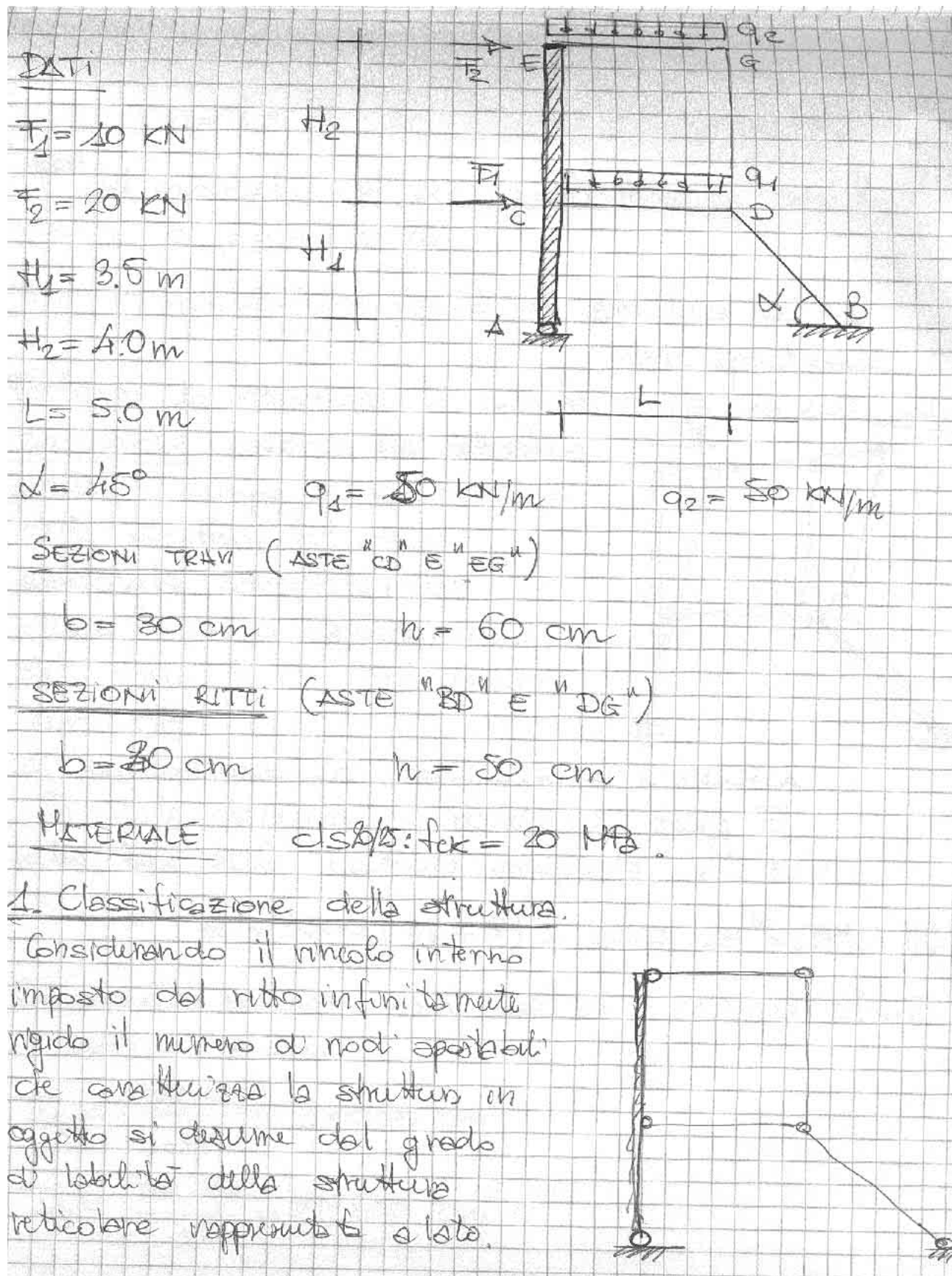


Analisi delle sollecitazioni su **Strutture intelaiate piane**

Telaio a due piani a maglie generiche con la presenza di
un tratto infinitamente rigido (soluzione secondo il
Metodo degli Spostamenti).



Dalla relazione

$$n_s = l_r = 3t - 2c$$

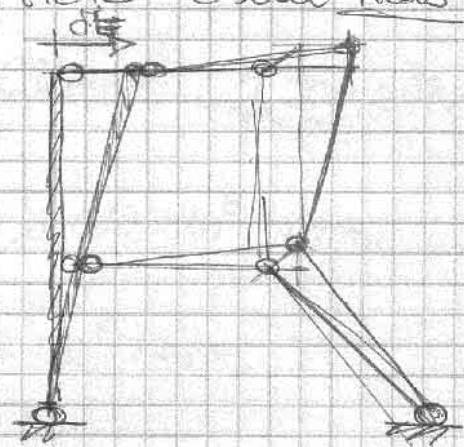
del momento di per la struttura in oggetto
 $t = 5$ e $c = 7$ si ha

$$n_s = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1 \Rightarrow \text{struttura ad 1}$$

nodo spostabile

Pertanto la struttura è caratterizzata da un nodo spostabile essendo

peraltro, il campo di spostamenti della struttura reticolare associato completamente descritto dallo spostamento del nodo E che indichiamo con δ_E .



1. VALUTAZIONE DEI PARAMETRI DI RIGIDEZZA

Si valuta dapprima il Modulo di Young E_c sulla base della relazione proposta dall'EC2:

$$E_c = 9500 (f_{ck} + 8)^{1/3} = 9500 \cdot 28^{1/3} \approx 28848 \text{ MPa}$$

Di seguito possono essere calcolati i momenti d'inerzia di travi e pilastri

$$I_t = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 540000 \text{ cm}^4$$

$$I_p = \frac{30 \cdot 50^3}{12} = 312500 \text{ cm}^4$$

e dunque i coefficienti di rigidezza ed i momenti di incastro perfetto delle varie aste:

ASTA CD

$$W_{CD} = \frac{AEI_t}{L} = \frac{4 \cdot 28847 \cdot 6 \cdot 5,40 \cdot 10^9}{5000} = 1,246 \cdot 10^{11} \text{ Nmm}$$

$$W_{DC} = \frac{AEI_t}{L} = 1,246 \cdot 10^{11} \text{ Nmm}$$

$$V_{CD} = V_{DC} = \frac{2Ee \cdot I_t}{L} = \frac{2 \cdot 28848 \cdot 5,40 \cdot 10^9}{5000} = 6,231 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}$$

$$U_{CD} = U_{DC} = \frac{W_{CD} + V_{CD}}{L} = \frac{1,246 \cdot 10^{11} + 6,231 \cdot 10^{10}}{5000} = 3,739 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$\mu_{CD} = -\frac{q_1 L^2}{12} = -\frac{50 \cdot 5000^2}{12} = -1,042 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

$$\mu_{DC} = \frac{q_1 L^2}{12} = \frac{50 \cdot 5000^2}{12} = 1,042 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

ASTA EG

$$W_{EG} = W_{GE} = W_{CD} = 1,246 \cdot 10^{11} \text{ Nmm}$$

$$V_{EG} = V_{GE} = V_{CD} = 6,231 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}$$

$$U_{EG} = U_{GE} = U_{CD} = 3,739 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$\mu_{EG} = \mu_{CD} = -1,042 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

$$\mu_{GE} = \mu_{DC} = 1,042 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

ASTA BD

$$l_{BD} = H_1 / \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot 3.50 = 4.95 \text{ m}$$

$$W_{BD} = \frac{4EI_p}{l_{BD}} = \frac{4 \cdot 28848 \cdot 3.125 \cdot 10^9}{4.950} = 7.285 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}$$

$$W_{DB} = W_{BD} = 7.285 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}$$

$$V_{BD} = V_{DB} = \frac{2EI_p}{l_{BD}} = 3.643 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}$$

$$U_{BD} = U_{DB} = \frac{W_{BD} + V_{BD}}{l_{BD}} = 2.208 \cdot 10^7 \text{ N}$$

ASTA GD

$$W_{DG} = \frac{4EI_p}{H_2} = \frac{4 \cdot 28848 \cdot 3.125 \cdot 10^9}{4.950} = 9.015 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}$$

$$W_{GD} = W_{DG} = 9.015 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}$$

$$V_{DG} = V_{GD} = 4.507 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}$$

$$U_{DG} = U_{GD} = \frac{W_{DG} + V_{DG}}{H_2} = 3.381 \cdot 10^7 \text{ N}$$

2. RISOLUZIONE SECONDO IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI (MDS).

Nella risoluzione secondo il MDS vanno dapprima individuati gli spostamenti nodali liberi che, nella fattispecie sono i

seguenti,

$$\underline{s} = (\varphi_D, \varphi_G, \delta_E)$$

Quanto alle rotazioni negli altri nodi si osserva che esse sono legate a δ_E secondo la seguente relazione:

$$\varphi_C = \varphi_E = \frac{\delta_E}{H_1 + H_2}.$$

Quanto allo spostamento subito dal nodo ~~per~~ C pure risulta:

$$\delta_C = \frac{H_1}{H_1 + H_2} \delta_E$$

in forza dell'ipotesi di indeformabilità dell'asta AE. Vanno, dunque, scritte 3 equazioni per calcolare i valori degli "spostamenti" raccolti nel vettore $\underline{s}$.

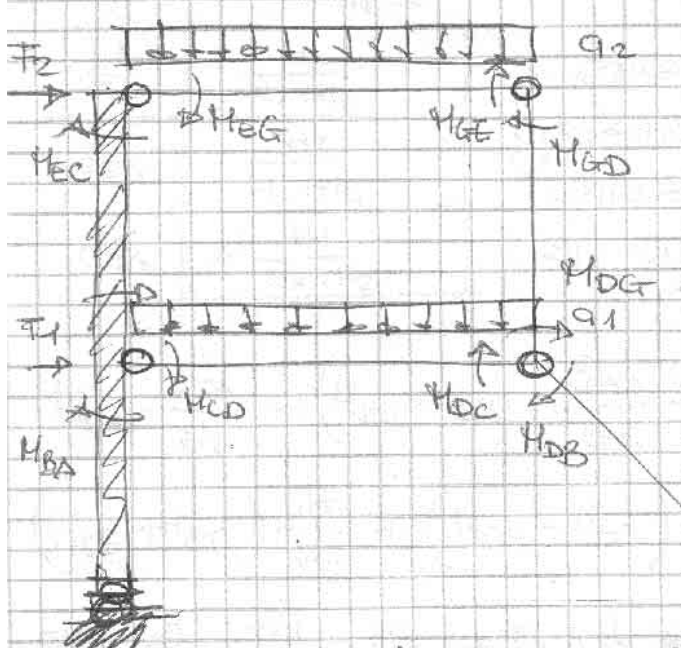
Due di queste equazioni si scrivono facilmente imponendo l'equilibrio alla rotazione nei ~~prati~~ nodi D e G come segue

$$M_{DB} + M_{DC} + M_{DG} = 0 \quad (1)$$

$$M_{GD} + M_{GE} = 0 \quad (2)$$

La terza equazione va ricercata in una condizione di equilibrio globale che

può essere ottenuta dalla struttura del principio dei Lavori Virtuali sul sistema di forze equivalenti agente sulla struttura reticolare associata che "lavora" per un campo di spostamenti virtuali imposto su di essa

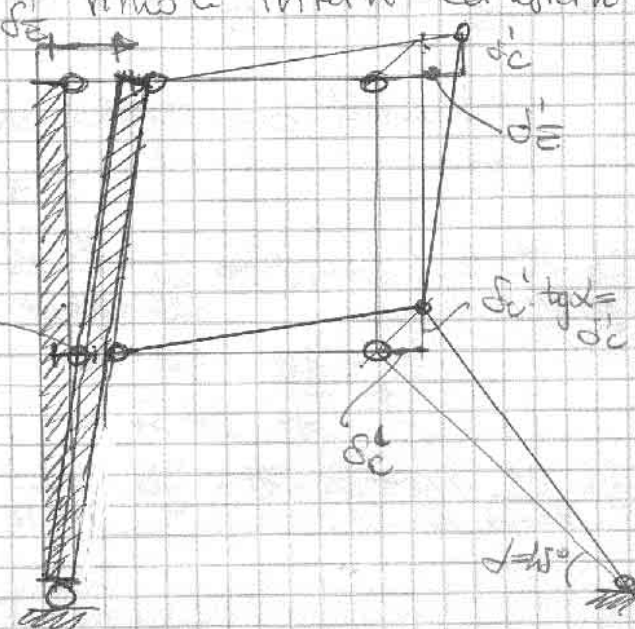


Il campo di spostamenti virtuali si può ottenere imponendo uno spostamento δ'_E e costruendo il campo di spostamenti rigidi infinitesimi della struttura

nel rispetto dei vincoli interni ed esterni

Lo spostamento δ'_E induce sulle aste spostamenti (virtuali) relativi deducibili dalla seguente tabella:

$$\delta'_C = \frac{H_1}{H_1 + H_2} \delta'_E$$



	δ'_E	
δ'_{AC}	$\frac{H_1}{H_1+H_2}$	$\frac{H_1}{H_1+H_2} = \frac{3.5}{2.5+4} = 0.467$
δ'_{BD}	$\frac{H_1}{H_1+H_2} \sqrt{2}$	
δ'_{CD}	$-\frac{H_1}{H_1+H_2}$	$\frac{H_2}{H_1+H_2} = 0.533$
δ'_{EC}	$\frac{H_2}{H_1+H_2}$	
δ'_{DG}	$\frac{H_2}{H_1+H_2}$	
δ'_{EG}	$-\frac{H_1}{H_1+H_2}$	

L'equazione di equilibrio globale necessaria per la chiusura del problema si scrive come segue:

$$\begin{aligned}
 & H_{CA} \cdot \frac{\delta'_{CA}}{H_1} + (H_{BD} + H_{DB}) \cdot \frac{\delta'_{BD}}{L_{BD}} + (H_{CD} + H_{DC}) \cdot \frac{\delta'_{CD}}{L_{CD}} + \\
 & (H_{CE} + H_{EC}) \frac{\delta'_{CE}}{H_2} + (H_{DG} + H_{GD}) \cdot \frac{\delta'_{DG}}{H_2} + (H_{EG} + H_{GE}) \cdot \frac{\delta'_{EG}}{L} + \\
 & F_1 \cdot \frac{H_1}{H_1+H_2} \cdot \delta'_E + F_2 \cdot \delta'_E - q_1 \cdot L \cdot \frac{\delta'_E}{2} - q_2 \cdot L \cdot \frac{\delta'_E}{2} = 0
 \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni degli spostamenti virtuali in funzione di δ'_E :

$$\begin{aligned}
 & H_{CA} \cdot \frac{H_1}{H_1+H_2} \frac{\delta'_E}{H_1} + (H_{BD} + H_{DB}) \frac{\sqrt{2} H_1}{H_1+H_2} \frac{\delta'_E}{L_{BD}} = (H_{CD} + H_{DC}) \cdot \frac{1}{L} \frac{H_1}{H_1+H_2} \cdot \delta'_E \\
 & + (H_{CE} + H_{EC}) \frac{H_2}{H_1+H_2} \cdot \frac{\delta'_E}{H_2} + (H_{DG} + H_{GD}) \cdot \frac{H_2}{H_1+H_2} \frac{\delta'_E}{H_2} + \\
 & (H_{EG} + H_{GE}) \frac{H_2}{H_1+H_2} \cdot \frac{1}{L} \cdot \delta'_E + F_1 \cdot \frac{H_1}{H_1+H_2} \cdot \delta'_E + F_2 \cdot \delta'_E - \frac{q_1 L}{2} \frac{H_1}{H_1+H_2} \delta'_E \\
 & - \frac{q_2 L}{2} \frac{H_1}{H_1+H_2} \delta'_E = 0
 \end{aligned}$$

da cui:

$$\left[\frac{M_{CA}}{H_1 + H_2} + \frac{(M_{BD} + M_{DB})}{H_1 + H_2} \cdot \frac{2}{L} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} + \frac{M_{CE} + M_{EC}}{H_1 + H_2} + \right. \\ \left. \frac{M_{DG} + M_{GD}}{H_1 + H_2} - \frac{M_{EG} + M_{GE}}{L} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2} + F_1 \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} + F_2 + \right. \\ \left. - \left(\frac{q_1 L}{2} + \frac{q_2 L}{2} \right) \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} \right] \cdot \delta'_E = 0$$

La terza equazione si ottiene, dunque, annullando il ~~terzo~~ primo fattore della relazione precedente. In esso, tra i vari termini, compaiono anche i momenti nodali relativi all'asta ΔE che non possono essere espressi in funzione degli spostamenti nodali del nastro s . In particolare, i termini evidenziati e riportati nel seguito

$$\frac{M_{CA} + M_{CE} + M_{EC}}{H_1 + H_2} \quad (2)$$

costituiscono altre incognite rispetto ai valori ϕ_D , ϕ_G e δ . Tuttavia, è possibile imporre gli seguenti equilibri nodali

$$M_{CA} + M_{CE} + M_{CD} = 0 \Rightarrow M_{CA} + M_{CE} = -M_{CD}$$

$$M_{EC} + M_{EG} = 0 \Rightarrow M_{EC} = -M_{EG}$$

e dunque, sostituirle i termini della (2) con momenti relativi ad aste deformabili per le quali si può ~~determinare~~ esprimere

$$M_{ij} = W_{ij} Q_i + V_{ij} Q_j - U_{ij} \delta_{ij} + M_{ij}$$

Per tanto la terza equazione d'ordine:

(3)

$$\begin{aligned} & - \frac{M_{ED} + M_{EG}}{H_1 + H_2} + 2 \frac{M_{BD} + M_{BE}}{H_1 + H_2} - \frac{M_{ED} + M_{EC}}{L} \frac{H_1}{H_1 + H_2} + \frac{M_{BD} + M_{BE}}{H_1 + H_2} + \\ & - \frac{M_{EG} + M_{GE}}{L} \frac{H_2}{H_1 + H_2} + F_1 \frac{H_1}{H_1 + H_2} + F_2 - (q_1 + q_2) \frac{L}{2} \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0 \end{aligned}$$

A questo punto vanno esplicitate le relazioni tra i momenti nodali M_{ij} delle aste e gli spostamenti nodali liberi considerati nelle analisi.

ASTA ED

$$M_{ED} = W_{ED} \cdot Q_E + V_{ED} \cdot Q_D - U_{ED} \cdot \delta_{ED} + M_{ED} =$$

$$= \frac{W_{ED}}{H_1 + H_2} \delta_E + V_{ED} Q_D + U_{ED} \frac{H_1}{H_1 + H_2} \cdot \delta_E + M_{ED} =$$

$$= \frac{W_{ED} + H_1 U_{ED}}{H_1 + H_2} \delta_E + V_{ED} Q_D + M_{ED}$$

$$M_{EC} = W_{EC} Q_D + V_{EC} Q_E - U_{EC} \delta_{ED} + M_{EC} = W_{EC} Q_D + \frac{V_{EC}}{H_1 + H_2} \delta_E +$$

$$+ U_{EC} \left(-\frac{H_1}{H_1 + H_2} \right) \delta_E + M_{EC} =$$

$$W_{EC} Q_D + \frac{V_{EC} - U_{EC} H_1}{H_1 + H_2} \delta_E + M_{EC}$$

ASTA EG

$$M_{EG} = W_{EG} \varphi_E + V_{EG} \varphi_G - U_{EG} \cdot \delta_{EG} + \mu_{EG} =$$

$$\frac{W_{EG}}{H_1 + H_2} \delta_E + V_{EG} \cdot \varphi_G + \frac{H_2}{H_1 + H_2} U_{EG} \delta_E + \mu_{EG}$$

$$M_{GE} = W_{GE} \varphi_G + V_{GE} \varphi_E - U_{GE} \delta_{EG} + \mu_{GE} =$$

$$W_{GE} \varphi_G + \frac{V_{GE}}{H_1 + H_2} \delta_E + U_{GE} \frac{H_2}{H_1 + H_2} \delta_E + \mu_{GE} =$$

$$W_{GE} \varphi_G + \frac{1}{H_1 + H_2} (V_{GE} + U_{GE} H_2) \delta_E + \mu_{GE}$$

ASTA BD

$$M_{BD} = \cancel{W_{BD} \cdot \varphi_B} + V_{BD} \varphi_D - U_{BD} \cdot \delta_{BD} + \cancel{\mu_{BD}} =$$

$$= -U_{BD} \frac{H_1}{H_1 + H_2} \sqrt{2} \delta_E + V_{BD} \cdot \varphi_D$$

$$M_{DB} = W_{DB} \varphi_D + \cancel{V_{DB} \cdot \varphi_B} - U_{DB} \cdot \delta_{BD} + \cancel{\mu_{BD}} =$$

$$W_{DB} \cdot \varphi_D - U_{DB} \frac{H_1}{H_1 + H_2} \sqrt{2} \delta_E$$

ASTA GD

$$M_{DG} = W_{DG} \cdot \varphi_D + V_{DG} \cdot \varphi_G - U_{DG} \cdot \delta_{DG} = W_{DG} \varphi_D + V_{DG} \varphi_G - \frac{H_2}{H_1 + H_2} U_{DG} \delta_E$$

$$M_{GD} = W_{GD} \cdot \varphi_G + V_{GD} \varphi_D - U_{GD} \delta_{DG} = W_{GD} \cdot \varphi_G + V_{GD} \cdot \varphi_D - \frac{H_2}{H_1 + H_2} U_{GD} \delta_E$$

Sostituendo le espressioni riportate sopra nelle eq. (1)-(2) e (3) si ottiene:

- eq. (1):

$$W_{DB} \varphi_D - \frac{H_1}{H_1 + H_2} \sqrt{2} U_{BD} \delta_E + W_{DC} \varphi_D + \frac{V_{DC} + U_{DC} H_1}{H_1 + H_2} \delta_E + \mu_{DC} =$$

$$W_{DG} \varphi_D + V_{DG} \cdot \varphi_G - \frac{H_2}{H_1 + H_2} U_{DG} \delta_E = 0$$

$$(W_{DB} + W_{DC} + W_{DG}) \varphi_D + V_{DG} \cdot \varphi_G + \left(\frac{V_{DC} + U_{DC} H_1}{H_1 + H_2} - \frac{H_1 \sqrt{2} U_{BD}}{H_1 + H_2} - \frac{H_2}{H_1 + H_2} U_{DG} \right) \delta_E =$$

$$-\mu_{DC}$$

- eq. (2):

$$W_{GD} \varphi_G + V_{GD} \varphi_D - \frac{H_2}{H_1 + H_2} U_{GD} \delta_E + W_{GE} \varphi_G + \frac{1}{H_1 + H_2} (V_{GE} + U_{GE} H_2) \delta_E + \mu_{GE} = 0$$

$$(W_{GD} + W_{GE}) \varphi_G + V_{GD} \varphi_D + \left[\frac{1}{H_1 + H_2} (V_{GE} + U_{GE} H_2) - \frac{H_2}{H_1 + H_2} U_{GD} \right] \delta_E = \mu_{GE}$$

- eq. (3)

$$\frac{2}{H_1 + H_2} H_{BD} - \frac{2 H_1 + 2 L}{2 (H_1 + H_2) L} H_{BD} + \frac{2}{H_1 + H_2} H_{DB} - \frac{H_1}{(H_1 + H_2) L} H_{DC} +$$

$$\frac{1}{H_1 + H_2} H_{DG} - \frac{2 H_2 + 2 L}{(H_1 + H_2) L} H_{DG} + \frac{1}{H_1 + H_2} H_{GD} - \frac{H_2}{(H_1 + H_2) L} H_{GE} +$$

$$\frac{H_1}{H_1 + H_2} F_1 + F_2 - \left(\frac{F_1 + F_2}{2} \right) \frac{L}{H_1 + H_2} = 0$$

da cui

$$\left[\frac{V_{CD} + U_{DC} H_1}{H_1 + H_2} - \frac{H_1}{H_1 + H_2} \sqrt{2} U_{BD} - \frac{H_2}{H_1 + H_2} U_{DG} \right] \cdot Q_D +$$

$$\left[\frac{1}{H_1 + H_2} (V_{GE} + U_{GE} H_2) - \frac{H_2}{H_1 + H_2} U_{GD} \right] Q_G +$$

$$\left[\frac{1}{(1 + H_2/H_1)^2} \frac{U_{CD} + U_{DC}}{L} + \frac{1}{(1 + H_1/H_2)^2} \frac{U_{EG} + U_{GE}}{L} + \frac{2}{(1 + H_2/H_1)^2} \frac{U_{BD} + U_{DB}}{H_1 \sqrt{2}} \right.$$

$$+ \frac{1}{(1 + H_2/H_1)^2} \frac{2 U_{CD}}{H_1} + \frac{1}{(1 + H_1/H_2)^2} \frac{U_{DG} + U_{GD}}{H_2} + \frac{1}{(1 + H_1/H_2)^2} \frac{2 U_{EG}}{H_2} +$$

$$\left. + \frac{U_{CD} + U_{GE}}{(H_1 + H_2)^2} \right] \delta_E =$$

$$F_1 \frac{1}{1 + H_2/H_1} + F_2 - (q_1 + q_2) \frac{L}{2} - \frac{H_1}{H_1 + H_2}$$

Sostituendo i valori numerici e ponendo il sistema in forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} 2.87622 \cdot 10^{11} & 1.50744 \cdot 10^{10} & -6.84485 \cdot 10^6 \\ 1.50744 \cdot 10^{10} & 2.1477 \cdot 10^{11} & 7.72539 \cdot 10^6 \\ -6.84485 \cdot 10^6 & 7.72539 \cdot 10^6 & 28943 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_D \\ Q_G \\ \delta_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0467 \cdot 10^8 \\ 1.04167 \cdot 10^8 \\ -64222.2 \end{bmatrix}$$

da cui, sostituendo:

$$Q_D = -3.63267 \cdot 10^{-4}, \quad Q_G = -3.29005 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_E = 2,21704 \text{ mm}$$

Valori di Momenti e Tagli ai Nodi delle Aste Flessibili

- ASTA BD

$$M_{BD} = W_{BD} \cdot Q_D - U_{BD} \cdot \delta_D = 1,90663 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$$

$$M_{DB} = W_{DB} \cdot Q_D - U_{DB} \cdot \delta_D = 5,83107 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$T_{BD} = T_{DB} = - \frac{M_{BD} + M_{DB}}{L_{BD}} = -503016 \text{ N}$$

- ASTA CD

$$M_{CD} = W_{CD} \cdot Q_C + V_{CD} \cdot Q_D - U_{CD} \cdot \delta_C + \mu_{CD} = -2,02328 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

$$M_{DC} = 1,8306 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$T_{CD} = \frac{q_1 L}{2} - \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L} = 165109 \text{ N}$$

$$T_{DC} = - \frac{q_1 L}{2} - \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L} = -84891 \text{ N}$$

ASTA DG

$$M_{DG} = -7,6413 \cdot 10^6 \text{ Nmm}, \quad M_{GD} = -6,06529 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$T_{DG} = T_{GD} = - \frac{M_{DG} + M_{GD}}{L_2} = 3419,85 \text{ N}$$

ASTA EG

$$M_{EG} = W_{EG} \cdot Q_E + V_{EG} \cdot Q_G - U_{EG} \cdot \delta_E + \mu_{EG} = -2,00187 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

$$M_{GE} = 6,06529 \cdot 10^6$$

$$T_{EG} = \frac{q_2 L}{2} - \frac{M_{EG} + M_{GE}}{L} = 163824 \text{ N}$$

$$T_{GE} = - \frac{q_2 L}{2} - \frac{M_{EG} + M_{GE}}{L} = -86175,7 \text{ N}$$

CALCOLO DEGLI SFORZI NORMALI PER EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE DEI NODI.

- NODO G

$$\text{eq. x: } N_{GE} - T_{GD} = 0 \Rightarrow N_{GE} = 3419,85 \text{ N}$$

$$\text{eq. y: } -N_{GD} - T_{GE} = 0 \Rightarrow N_{GD} = 86175,7 \text{ N}$$

- NODO D

$$\text{eq. x: } N_{DC} + T_{DG} - T_{DB} \cdot \sqrt{2}/2 - N_{DB} \cdot \sqrt{2}/2 = 0$$

$$\text{eq. y: } -T_{DC} + N_{DG} + T_{DB} \cdot \sqrt{2}/2 - N_{DB} \cdot \sqrt{2}/2 = 0$$

da cui

$$N_{DC} = 160533 \text{ N} ; N_{DB} = 236895 \text{ N}.$$

CALCOLO DEI MOMENTI SUL TRATTO RIGIDO

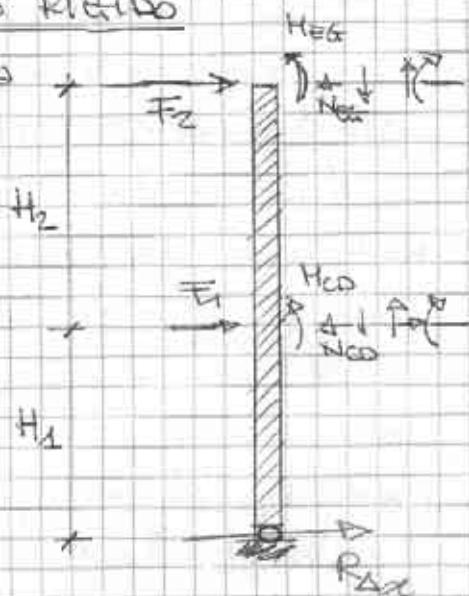
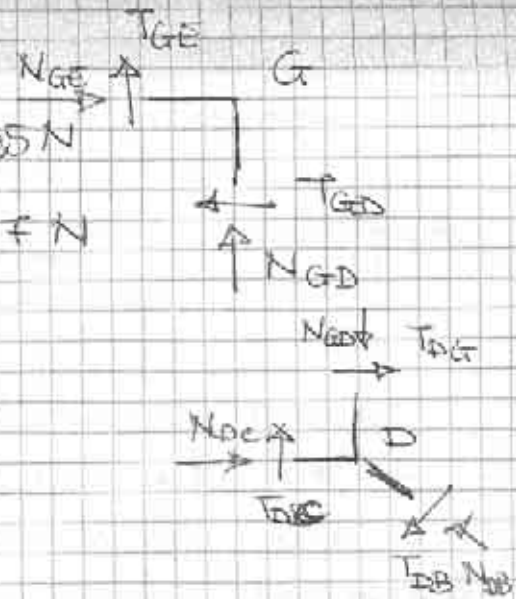
Si determina dapprima il valore della componente orizzontale della reazione della cerniera posta in A. L'equilibrio allo spostamento orizzontale del tratto rigido si scrive

$$R_{Ax} + T_1 + T_2 - N_{EG} + N_{GD} = 0$$

da cui

$$R_{Ax} = N_{EG} + N_{GD} - T_1 - T_2 = 133953 \text{ N}$$

~~Calcolo~~



Di conseguenza il momento M_{CA} si valute
come segue

$$M_{CA} = +R_{Ax} \cdot h_1 = +4.68835 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

Pertanto il taglio nudo

$$T_{CA} = T_{CA} = R_{Ax} = -133953 \text{ N}$$

Per l'equilibrio alla rotazione del nodo C si ha

$$M_{CA} + M_{CD} - M_{CE} = 0 \Rightarrow M_{CE} = -M_{CA} - M_{CD} = -2.66507 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

mentre il momento M_{EC} si ricava dall'equilibrio
del nodo E

$$M_{EC} + M_{EG} = 0 \Rightarrow M_{EC} = -M_{EG} = 2.00187 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

In fine, il taglio sull'asta EC vale

$$T_{CE} = T_{EC} = - \frac{M_{EC} + M_{CE}}{h_2} = -16580.1 \text{ N}$$