

# Prima esercitazione progettuale

## Progetto di un capannone industriale in acciaio

1	Verifica di stabilità flesso-torsionale della capriata. ....	2
2	Principi per la definizione della rigidità rotazionale del collegamento arcareccio-capriata.....	6
3	Un esempio numerico .....	10

# 1 VERIFICA DI STABILITÀ FLESSO-TORSIONALE DELLA CAPRIATA.

La presenza di un sistema di controvento di falda (trasversale e longitudinale) e verticale conferisce alla copertura un carattere di corpo rigido determinando, per conseguenza, il fatto che le distanze reciproche tra i nodi superiori delle diverse capriate rimane invariata nella configurazione indeformata.

Questo fatto, peraltro, rende lecita la scelta che si è fatta all'atto della verifica di stabilità delle aste di assumere come lunghezza libera di inflessione proprio la distanza tra i due nodi ai quali esse sono connesse. A stretto rigore, poiché l'ipotesi di impalcato rigido di cui si è detto riguarda a stretto rigore soltanto i nodi della copertura e non quelli relativi al corrente inferiore, è necessario verificare che il vincolo offerto dal complesso di barcarecci e controventi di falda sia valido anche per i vincoli del corrente inferiore (tramite le aste di parete), controllando, cioè, che non si verifichino fenomeni di instabilità flessio-torsionale della capriata nel suo complesso. Tali fenomeni possono verificarsi a partire da un certo valore del carico applicato sulla capriata in corrispondenza del quale può determinarsi la biforcazione dell'equilibrio rispetto alla configurazione banale secondo la quale i nodi della capriata dovrebbero rimanere nel piano della stessa.

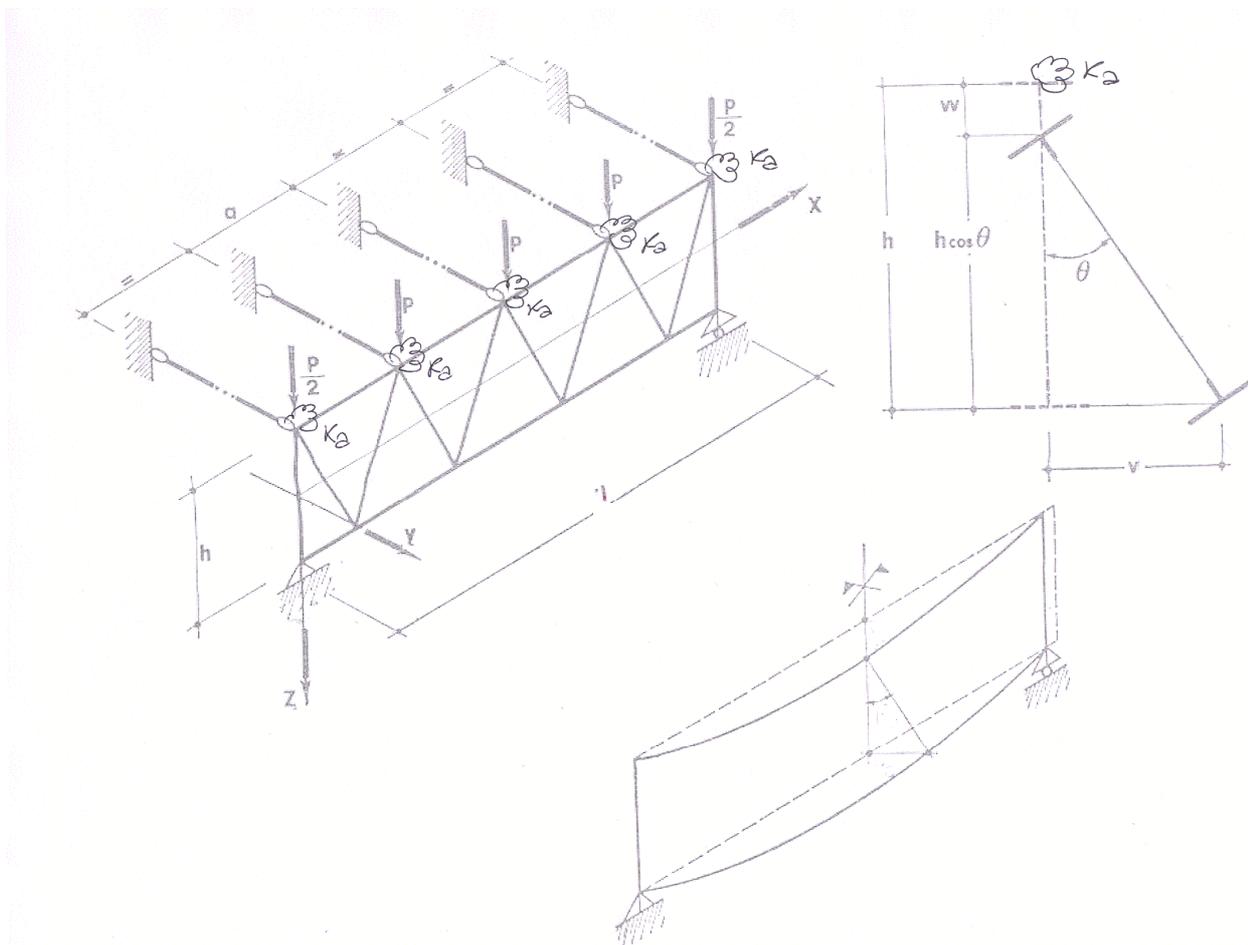


Figura 1: Configurazione instabile della capriata.

La valutazione del carico critico  $q_{cr}$  che determina questo tipo di fenomeno di instabilità, si può determinare sulla base di un approccio energetico che faccia derivare il carico critico all'instabilità flesso-torsionale in corrispondenza di un minimo relativo dell'energia potenziale  $\Pi$  dato dalla differenza tra l'energia di deformazione  $U$  (determinata sulla configurazione deformata) ed il lavoro  $W$  prodotto dai carichi:

$$\Pi = U - W . \tag{1}$$

L'energia di deformazione, o meglio la sua variazione a partire dalla configurazione di equilibrio banale, può essere espressa in funzione della deformata fuori piano del corrente inferiore  $v(x)$  e della rigidezza rotazionale che si oppone alla rotazione fuori piano  $\theta(z)$  della capriata:

$$U = \frac{EI_{z,\text{inf}}}{2} \cdot \int_0^l \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{K_a}{i_a} \int_0^l [\theta(x)]^2 \cdot dx , \tag{2}$$

e poiché risulta

$$v(x) = \theta(x) \cdot h , \tag{3}$$

si ottiene la seguente espressione per l'energia di deformazione  $U$

$$U = \frac{EI_{z,\text{inf}}}{2} \cdot \int_0^l \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{K_a}{i_a} \cdot \int_0^l \left( \frac{v(x)}{h} \right)^2 \cdot dx . \tag{4}$$

Quanto al lavoro delle forze esterne  $W$ , si può assumere che un carico uniforme e equivalente  $q$  ottenuto come:

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{n_{\text{odi}}} P_i}{l} , \tag{5}$$

ottenendo la seguente espressione:

$$W = \int_0^l q \cdot w(x) \cdot dx . \tag{6}$$

Poiché risulta:

$$w(x) = [1 - \cos \theta(x)] \cdot h \cong \frac{[\theta(x)]^2}{2} \cdot h = \frac{[v(x)]^2}{2h} , \tag{7}$$

la (6) si può esprimere come segue:

$$W = \frac{q}{2h} \cdot \int_0^l [v(x)]^2 \cdot dx . \tag{8}$$

In definitiva, risulta:

$$\Pi(v) = \frac{EI_{z,\text{inf}}}{2} \cdot \int_0^l \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{K_a}{i_a} \cdot \int_0^l \left( \frac{v(x)}{h} \right)^2 \cdot dx - \frac{q}{2h} \cdot \int_0^l [v(x)]^2 \cdot dx . \quad (9)$$

Ipotizzando per l'espressione di  $v$  una forma sinusoidale compatibile con le condizioni di vincolo alle estremità, si può assumere la seguente relazione:

$$v(x) = v_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l_0}\right) . \quad (10)$$

essendo in generale  $l_0$  la distanza tra due punti di flesso della possibile deformata  $v(x)$  (nel nostro caso  $l_0=l$ ).

Sostituendo la (10) nella (9) si ottiene la seguente espressione per il funzionale energia potenziale:

$$\Pi(v_0) = \left( \frac{1}{2} \cdot EI_{z,\text{inf}} \cdot \left( \frac{\pi}{l_0} \right)^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{K_a}{i_a h^2} - \frac{q}{2h} \right) \cdot v_0^2 \cdot \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l_0} \cdot dx . \quad (11)$$

Il valore del carico critico si ottiene determinando il punto di stazionarietà di  $\Pi$  rispetto a  $v_0$ :

$$\frac{\partial \Pi(v_0)}{\partial v_0} = \left( \frac{1}{2} \cdot EI_{z,\text{inf}} \cdot \left( \frac{\pi}{l_0} \right)^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{K_a}{i_a h^2} - \frac{q}{2h} \right) \cdot 2v_0 \cdot \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l_0} \cdot dx = 0 . \quad (12)$$

nel caso in cui  $v_0$  è non nullo (ovvero quando si verifica una biforcazione dell'equilibrio). In quelle condizioni risulta:

$$\frac{1}{2} \cdot EI_{z,\text{inf}} \cdot \left( \frac{\pi}{l_0} \right)^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{K_a}{i_a h^2} - \frac{q_{cr}}{2h} = 0 , \quad (13)$$

da cui

$$q_{cr} = \pi^4 \cdot \frac{EI_{z,\text{inf}}}{l_0^4} \cdot h + \frac{K_a}{i_a h} . \quad (14)$$

Il valore del carico critico  $q_{cr}$  elastico, o corrispondentemente il momento critico rispetto  $M_{cr}$ ,

$$M_{cr} = q_{cr} \cdot \left( \frac{l^2}{8} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{q_{cr} l^2}{8} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot a}{l} \right)^2 \right] . \quad (15)$$

(la scelta del denominatore dipende dallo schema della capriata e dalla lunghezza a degli sbalzi laterali: 8 si riferisce al caso di capriata semplicemente appoggiata in assenza di sbalzi laterali) può essere utilizzato per la determinazione della snellezza adimensionale rispetto al fenomeno di instabilità flessotorsionale:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_{y,el,Rk}}{M_{cr}}} . \quad (16)$$

dove  $M_{y,el,Rk}$  è il valore caratteristico del momento resistente (elastico) della sezione della capriata. Quest'ultimo, può essere semplicemente determinato come segue:

$$M_{y,el,Rk} = W_{y,el} f_{yk} \quad (17)$$

essendo evidentemente  $W_{y,el,Rk}$  il modulo di resistenza elastico della sezione attorno all'asse  $y$  (quello ortogonale al piano di sollecitazione della capriata secondo quanto rappresentato nella Figura 1).

Dette  $A_{c,sup}$  e  $A_{c,inf}$  le aree totali dei correnti superiore ed inferiore, rispettivamente, e  $h$  la distanza tra i loro baricentri, la distanza  $d_G$  del baricentro della sezione trasversale equivalente della capriata da quello del corrente superiore può determinarsi come segue:

$$d_G = \frac{A_{c,inf}}{A_{c,sup} + A_{c,inf}} \cdot h \quad (18)$$

il momento d'inerzia della medesima sezione rispetto all'asse  $y$  vale:

$$I_{y,G} = A_{c,sup} \cdot d_G^2 + A_{c,inf} \cdot (h - d_G)^2 \quad (19)$$

e, in definitiva, il modulo di resistenza coinvolto nella relazione (16) si determina come segue:

$$W_{y,el} = \frac{I_{y,G}}{\max(d_G; h - d_G)} \quad (20)$$

La verifica di stabilità flessio-torsionale può, dunque, essere condotta secondo quanto previsto al punto 4.2.4.1.3.2 della NTC – D.M. 14/01/2008, definendo come segue un valore di calcolo del momento resistente:

$$M_{b,Rd} = \frac{\chi_{LT} W_{y,el} f_{yk}}{\gamma_{M1}} \quad (21)$$

e confrontando il corrispondente valore dello sforzo normale agente sui correnti della travatura reticolare:

$$N_{b,Rd} = \frac{M_{b,Rd}}{h} \quad (22)$$

con il valore di calcolo  $N_{Ed}$  della sollecitazione assiale desunta dall'analisi:

$$N_{Ed} \leq N_{b,Rd} \quad (23)$$

## 2 PRINCIPI PER LA DEFINIZIONE DELLA RIGIDEZZA ROTAZIONALE DEL COLLEGAMENTO ARCARECCIO-CAPRIATA

La rigidità rotazionale  $K_\theta$  può essere ricondotta alla rigidità del collegamento tra arcareccio e cornute superiori della capriata. Tale rigidità è legata al comportamento di due "componenti" principali:

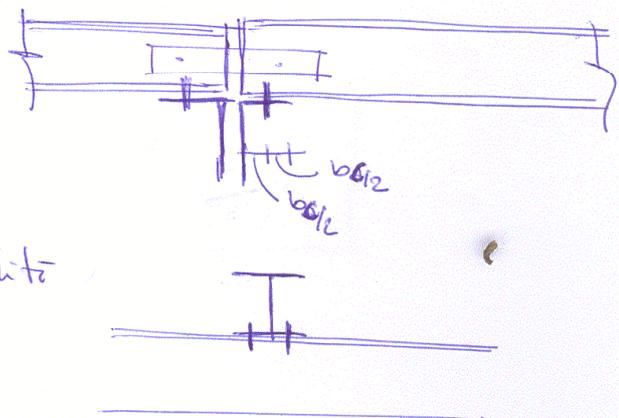
- il bullone  $ab$  con la sua rigidità assiale determina la possibilità di rotazioni relative tra cornute superiori ed arcareccio;
- l'ala dell'arcareccio, la cui deformabilità flessionale influenza l'interazione tra capriata ed arcareccio stesso.

Le due componenti deformabilità possono intendersi collegate in serie e, dunque, saranno caratterizzate da una flessibilità equivalente  $E_{q,eq}$  pari alla somma dei due contributi

$E_{q,b}$  ed  $E_{q,a}$ .

Valutazione della deformabilità rotazionale  $E_{q,a}$  dovuta all'arcareccio

Il contributo di deformabilità dovuto alla flessibilità dell'ala dell'arcareccio



dipende sia dalla tipologia di arcareccio  
 che dalla ~~de~~ de taglio del collegamento.

Nell'ipotesi di arcareccio tipo IPE collegato  
 con un angolo da L (magari del tipo  
 "piegato a freddo") si ha che per una  
 rotazione unitaria relativa all'inflessione della  
 profilo ad L vale

$$V = 1 \cdot \frac{bc}{2}$$

e la forza che

è necessaria per  
 ottenere una tale inflessione  
 è data da

$$V = \frac{F_a \cdot \left(d - \frac{ba}{2}\right)^2}{3 E_a \cdot 2 \left(d - \frac{ba}{2}\right) \cdot \frac{t^3}{12}}$$

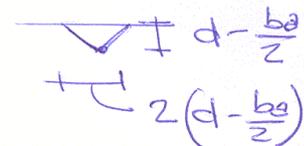
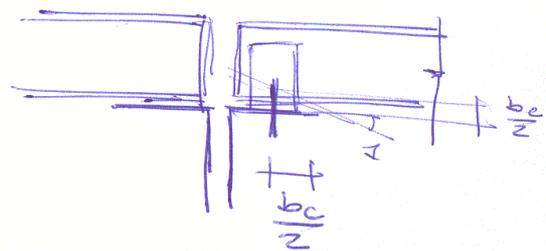
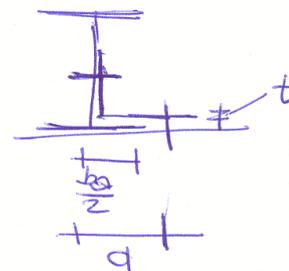
da cui

$$F_a = \frac{1}{2} E_a \frac{bc}{2} t^3 \frac{1}{\left(d - \frac{ba}{2}\right)^2}$$

e dunque, per definizione

$$K_{a,a} = F_a \cdot \frac{bc}{2} = \frac{1}{2} E_a \left(\frac{bc}{2}\right)^2 \cdot \frac{t^3}{\left(d - \frac{ba}{2}\right)^2}$$

$$E_{q,a} = \frac{1}{K_{a,a}}$$



Rotazione della deformabilità  $E_{\varphi, b}$  legata al bullone.

Imponendo una rotazione relativa unitaria ~~ed~~ ipotizzando che il collegamento non si deformi, l'allungamento del bullone è pari a

$$v_b = \varphi \cdot \frac{b_c}{2} = 1 \cdot \frac{b_c}{2}$$

e, dunque, data una area assiale pari a

$$F_b = \frac{b_c}{2} \frac{EA_b}{l_b}$$

da cui deriva il momento (proporzionale ad una rotazione unitaria)

$$K_{\varphi, b} = F_b \cdot \frac{b_c}{2} = \frac{EA_b}{l_b} \cdot \left(\frac{b_c}{2}\right)^2$$

e

$$E_{\varphi, b} = \frac{1}{K_{\varphi, b}} = \frac{l_b}{EA_b} \left(\frac{2}{b_c}\right)^2$$

Determinazione del valore di  $K_{\varphi}$

Tenendo conto anche della rigidità flessionale del profilo

$$K_p = \frac{3EI_p}{l_c}$$

si ha che, trattandosi di deformabilità

disposte in serie, il valore di  $K_\theta$  può essere determinato come segue

$$K_\theta = \frac{1}{\frac{1}{K_{\theta a}} + \frac{1}{K_{\theta b}} + \frac{1}{K_p}} =$$

$$= \frac{E_\theta}{\frac{2(d - \frac{b_0}{2})^2}{t^3 (bc/2)^2} + \frac{lb}{\Delta_b} \left(\frac{2}{bc}\right)^2 + \frac{bc}{3 I_p}}$$

ovvero, sinteticamente :

$$K_\theta = K_p \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_p}{K_{\theta a}} + \frac{K_p}{K_{\theta b}}}$$

### 3 UN ESEMPIO NUMERICO

Consideriamo il caso in oggetto in cui sia il corrente inferiore che quello superiore siano realizzati da due profili ad L 40x80x6 affiancati ad una distanza di 10 mm. Sia, inoltre  $h=2100$  mm la distanza tra i baricentri dei due correnti.

Il momento d'inerzia rispetto all'asse z-z (ovvero quello parallelo al piano della capriata in Figura 1) può essere calcolato come segue:

$$I_{z,\text{inf}} = 2 \cdot \left[ I_{z,c,\text{inf}} + A_{c,\text{inf}} \cdot \left( i_z + \frac{s}{2} \right)^2 \right] = 2 \cdot \left[ 75900 + 689 \cdot \left( 8.84 + \frac{10}{2} \right)^2 \right] = 415750 \text{ mm}^4 . \quad (24)$$

Poiché il collegamento tra arcareccio e realizzato tramite una unione bullonata, si ritiene trascurabile la rigidità di tale collegamento:

$$K_a \approx 0 \quad (25)$$

e, in sostanza, si assume che tale collegamento sia schematizzabile come una cerniera.

Il valore del carico critico rispetto all'instabilità flessione-torsionale della capriata si ottiene dunque come segue:

$$q_{cr} = \pi^4 \cdot \frac{EI_{z,\text{inf}}}{l_0^4} \cdot h = \pi^4 \cdot \frac{210000 \cdot 415750}{(21000)^4} \cdot 2100 = 0.092 \text{ N/mm} . \quad (26)$$

Supponendo che la capriata abbia una luce  $l_0=L= 21000$  mm e due sbalzi laterali di luce  $l_{sb}=4200$  mm, il momento flettente nella mezzera della trave equivalente dovuto al carico uniformemente ripartito  $q_{cr}$  vale:

$$M_{cr} = q_{cr} \cdot \left( \frac{L^2}{8} - \frac{l_{sb}^2}{2} \right) = q_{cr} \cdot \left( \frac{L^2}{8} - \frac{(L/5)^2}{2} \right) = 0.092 \cdot \frac{21000^2}{8} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^2 \right] = 4.25 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 4.25 \text{ kNm} . \quad (27)$$

Il valore del modulo di resistenza può essere valutato facilmente, essendo  $d_G=h/2$  (per ovvie ragioni di simmetria), il valore del modulo di resistenza  $W_{y,\text{el}}$ , definito in generale dalla (20), si può determinare come segue:

$$W_{x,\text{el}} = \frac{I_{x,G}}{\max(d_G; h - d_G)} = \frac{2 \cdot A_{c,\text{sup}} \cdot (h/2)^2}{h/2} = A_{c,\text{sup}} \cdot h = 2 \cdot 689 \cdot 2100 = 2.89 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

e, quindi, il valore caratteristico del momento di snervamento (rispetto all'asse "forte" y) si determina come segue:

$$M_{y,\text{el,Rk}} = W_{y,\text{el}} f_{yk} = 795.80 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 795.80 \text{ kNm}$$

Pertanto, la snellezza adimensionale si determina come segue:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{795.80}{4.26}} = 13.68 .$$

Un valore così alto della snellezza è di per sé indice di una struttura molto sensibile al possibile fenomeno di instabilità. Pertanto, la verifica, sebbene non condotta esplicitamente, si ritiene non soddisfatta.

Si decide, dunque, di disporre una crociera rompitratta posta nella mezzeria delle capriate, in modo da ridurne la luce libera di inflessione rispetto al fenomeno di instabilità flessio-torsionale  $l_0=L/2=10500$  mm. In questo modo il carico critico elastico si determina come segue:

$$q_{cr} = \pi^4 \cdot \frac{EI_{z,\text{inf}}}{(L/2)^4} \cdot h = \pi^4 \cdot \frac{210000 \cdot 415750}{(10500)^4} \cdot 2100 = 1.469 \text{ N/mm} \quad (28)$$

a cui corrisponde un momento critico pari a:

$$M_{cr} = q_{cr} \cdot \left( \frac{L^2}{8} - \frac{l_{sb}^2}{2} \right) = q_{cr} \cdot \left( \frac{L^2}{8} - \frac{(L/5)^2}{2} \right) = 1.469 \cdot \frac{21000^2}{8} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^2 \right] = 68.04 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 68.04 \text{ kNm} \quad (29)$$

ed una snellezza che si determina come segue:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{795.80}{68.04}} = 3.420 .$$

Assumendo la curva di instabilità “d” (Tabella 4.2.VII della NTC – D.M. 14/01/2008) come riferimento per il parametro delle imperfezioni ( $\alpha=0.76$ ) è possibile determinare il valore di  $\chi_{LT}$  dalla relazione 4.2.51 della NTC – D.M. 14/01/2008 (avendo anche imposto per semplicità ed a vantaggio di sicurezza  $\bar{\lambda}_{LT,0} = 0.2$   $f=1$  e  $\beta=1$ ):

$$\Phi_{LT} = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] = 7.572$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} = \frac{1}{7.572 + \sqrt{(7.572)^2 - (3.420)^2}} = 0,070 .$$

In definitiva, il valore del momento resistente equivalente può determinarsi come segue:

$$M_{b,Rd} = \frac{0.070 \cdot 795,80}{1.05} = 52.89 \text{ kNm}$$

cui corrisponde il seguente valore del carico assiale:

$$N_{b,Rd} = \frac{M_{b,Rd}}{h} = \frac{52.89}{2.10} = 25.19 \text{ kN} .$$

Tale valore va confrontato con il valore di progetto dell'azione assiale sollecitante  $N_{Ed}$  (ovvero il massimo in valore assoluto degli sforzi normali che si destano nei correnti superiore o inferiore nelle varie combinazioni di carico). Dovrà evidentemente risultare

$$N_{Ed} \leq N_{b,Rd} .$$

Nel caso in cui ciò non avvenga, si potrà agire sull'interasse delle crociere rompitratta riducendo  $l_0$  e, dunque, aumentando  $q_{cr}$  e, corrispondentemente, riducendo ulteriormente  $\bar{\lambda}_{LT}$ . Nel caso in oggetto, ad esempio, l'inserimento di una terza crociera rompitratta e, dunque, l'assunzione di  $l_0=l/3=7000$  mm porterebbe ad un valore di  $\chi_{LT}=0.271$  e di un momento critico pari a:

$$M_{b,Rd} = \frac{0.271 \cdot 795,80}{1.05} = 205.56 \text{ kNm} .$$