

**Seconda esercitazione progettuale:
Progetto di un elemento in Cemento
Armato Precompresso (C.A.P.)**

I DIAGRAMMI di MAGNEL

6.3 Diagrammi di Magnel

Un utile e sintetico strumento per la progettazione delle sezioni precomprese è costituito dai cosiddetti diagrammi di Magnel. Nel seguito si illustra la costruzione e si discute l'utilità di tali diagrammi.

In una sezione in C.A.P., caratterizzata da sforzi di precompressione al tiro ed in esercizio rispettivamente pari a βN e ad N , agente con eccentricità e , e da area, modulo di resistenza inferiore e modulo di resistenza superiore rispettivamente pari a A , W_i e W_s , imponendo che sia soddisfatta la verifica del calcestruzzo al lembo inferiore a tempo $t=0$ (momento agente pari a M_{min}), si ha:

$$\frac{\beta N}{A} + \frac{\beta N e}{W_i} - \frac{M_{min}}{W_i} \leq K_{max}^o \tag{6.1}$$

da cui:

$$N \beta \left(\frac{1}{A} + \frac{e}{W_i} \right) \leq K_{max}^o + \frac{M_{min}}{W_i} \tag{6.2}$$

$$N \left(\frac{W_i}{A} + e \right) \leq W_i \frac{K_{max}^o}{\beta} + \frac{M_{min}}{\beta} \tag{6.3}$$

Poichè può porsi:

$$\rho_{ns} = \frac{W_i}{A} \tag{6.4}$$

essendo ρ_{ns} il raggio di nocciolo superiore della sezione, si ha:

$$N \leq \frac{W_i K_{max}^o / \beta + M_{min} / \beta}{e + \rho_{ns}} \tag{6.5}$$

o in alternativa:

$$\frac{1}{N} \geq \frac{e + \rho_{ns}}{W_i K_{max}^o / \beta + M_{min} / \beta} \tag{6.6}$$

La (6.6) con il segno di uguaglianza fornisce un legame lineare fra $1/N$ ed e mediante una retta passante per il punto $1/N=0$ ed $e=-\rho_{ns}$; la (6.6) divide dunque il piano $1/N, e$ in due semipiani, di cui uno solo - il semipiano superiore - fornisce le coppie (N, e) che soddisfano la verifica (cfr. Fig. 6.1).

Analogamente, imponendo che sia soddisfatta la verifica del calcestruzzo al lembo superiore a tempo $t=0$, si ha:

$$\frac{\beta N}{A} - \frac{\beta N e}{W_s} + \frac{M_{min}}{W_s} \geq -K_{min}^o \tag{6.7}$$

da cui:

$$N \beta \left(\frac{1}{A} - \frac{e}{W_s} \right) \geq -K_{min}^o - \frac{M_{min}}{W_s} \tag{6.8}$$

e quindi:

$$N \left(\frac{W_s}{A} - e \right) \geq -W_s \frac{K_{min}^o}{\beta} - \frac{M_{min}}{\beta} \tag{6.9}$$

Poichè può porsi:

$$\rho_{ni} = \frac{W_s}{A} \tag{6.10}$$

essendo ρ_{ni} il raggio inferiore del nocciolo centrale d'inerzia della sezione, si ha:

$$N \leq \frac{W_s K_{max}^o / \beta + M_{min} / \beta}{e - \rho_{ni}} \quad \text{per } e \geq \rho_{ni} \tag{6.11a}$$

$$\text{qualsiasi } N \quad \text{per } e \leq \rho_{ni} \tag{6.11b}$$

o in alternativa:

$$\frac{1}{N} \geq \frac{e - \rho_{ni}}{W_s K_{min}^o / \beta + M_{min} / \beta} \tag{6.12}$$

E' facile verificare che la (6.12) vale tanto se $e < \rho_{ni}$ quanto se $e > \rho_{ni}$. In particolare se $e \leq \rho_{ni}$ qualsiasi valore dello sforzo N , purchè sia di compressione, soddisfa la verifica: ciò consegue dal fatto che tale disuguaglianza implica che lo sforzo normale è interno al nocciolo centrale d'inerzia e quindi tutta la sezione è compressa e la limitazione sulla tensione di trazione non produce nessun vincolo.

Anche la (6.12) con il segno di uguaglianza fornisce un legame lineare fra $1/N$ ed e mediante una retta, passante questa volta per il punto $1/N=0$ ed $e=\rho_{ni}$; la (6.12) divide il piano $1/N, e$ in due semipiani, uno ammissibile e l'altro no¹. Il soddisfacimento contemporaneo della (6.6) e della (6.12) riduce ulteriormente lo spazio delle soluzioni possibili (cfr. Fig. 6.2).

Analogamente, imponendo che sia soddisfatta la verifica del calcestruzzo al lembo inferiore a tempo infinito (momento agente pari a M_{max}), si ha:

$$\frac{N}{A} + \frac{Ne}{W_l} - \frac{M_{max}}{W_l} \geq -K_{min}^{\infty} \tag{6.13}$$

da cui:

$$N \left(\frac{1}{A} + \frac{e}{W_l} \right) \geq -K_{min}^{\infty} + \frac{M_{max}}{W_l} \tag{6.14}$$

¹Si osservi che, poichè in genere:

$$W_s K_{min}^o < W_l K_{max}^o$$

consegue che:

$$\frac{1}{W_s K_{min}^o / \beta + M_{min} / \beta} > \frac{1}{W_l K_{max}^o / \beta + M_{min} / \beta}$$

ovvero che il coefficiente angolare della retta definita dalla (6.12) è maggiore del coefficiente angolare della retta definita dalla (6.6).

$$N \left(\frac{W_i}{A} + e \right) \geq -W_i K_{\min}^{\infty} + M_{\max} \tag{6.15}$$

$$N \geq \frac{-W_i K_{\min}^{\infty} + M_{\max}}{e + \rho_{ns}} \tag{6.16}$$

o in alternativa:

$$\frac{1}{N} \leq \frac{e + \rho_{ns}}{-W_i K_{\max}^{\infty} + M_{\max}} \tag{6.17}$$

Infine la verifica a tempo infinito al lembo superiore impone che:

$$\frac{N}{A} - \frac{Ne}{W_s} + \frac{M_{\max}}{W_s} \leq K_{\max}^{\infty} \tag{6.18}$$

da cui:

$$N \left(\frac{1}{A} - \frac{e}{W_s} \right) \leq K_{\max}^{\infty} - \frac{M_{\max}}{W_s} \tag{6.19}$$

$$N \left(\frac{W_s}{A} - e \right) \leq W_s K_{\max}^{\infty} - M_{\max} \tag{6.20}$$

$$N \geq \frac{-W_s K_{\max}^{\infty} + M_{\max}}{e - \rho_{ni}} \tag{6.21}$$

o in alternativa:

$$\frac{1}{N} \leq \frac{e - \rho_{ni}}{-W_s K_{\max}^{\infty} + M_{\max}} \tag{6.22}$$

Le eqn. (6.6), (6.12), (6.17) e (6.22) in definitiva, come mostrato in Fig. 6.3, forniscono due coppie di rette, una passante per il punto $1/N=0$ ed $e=-\rho_{ns}$ e l'altra per il punto $1/N=0$ ed $e=\rho_{ni}$. Complessivamente il soddisfacimento delle 4 disequazioni definisce il quadrilatero ABCD nel piano $1/N, e$ che contiene tutte le possibili coppie ammissibili ai fini delle verifiche iniziali e finali della sezione.

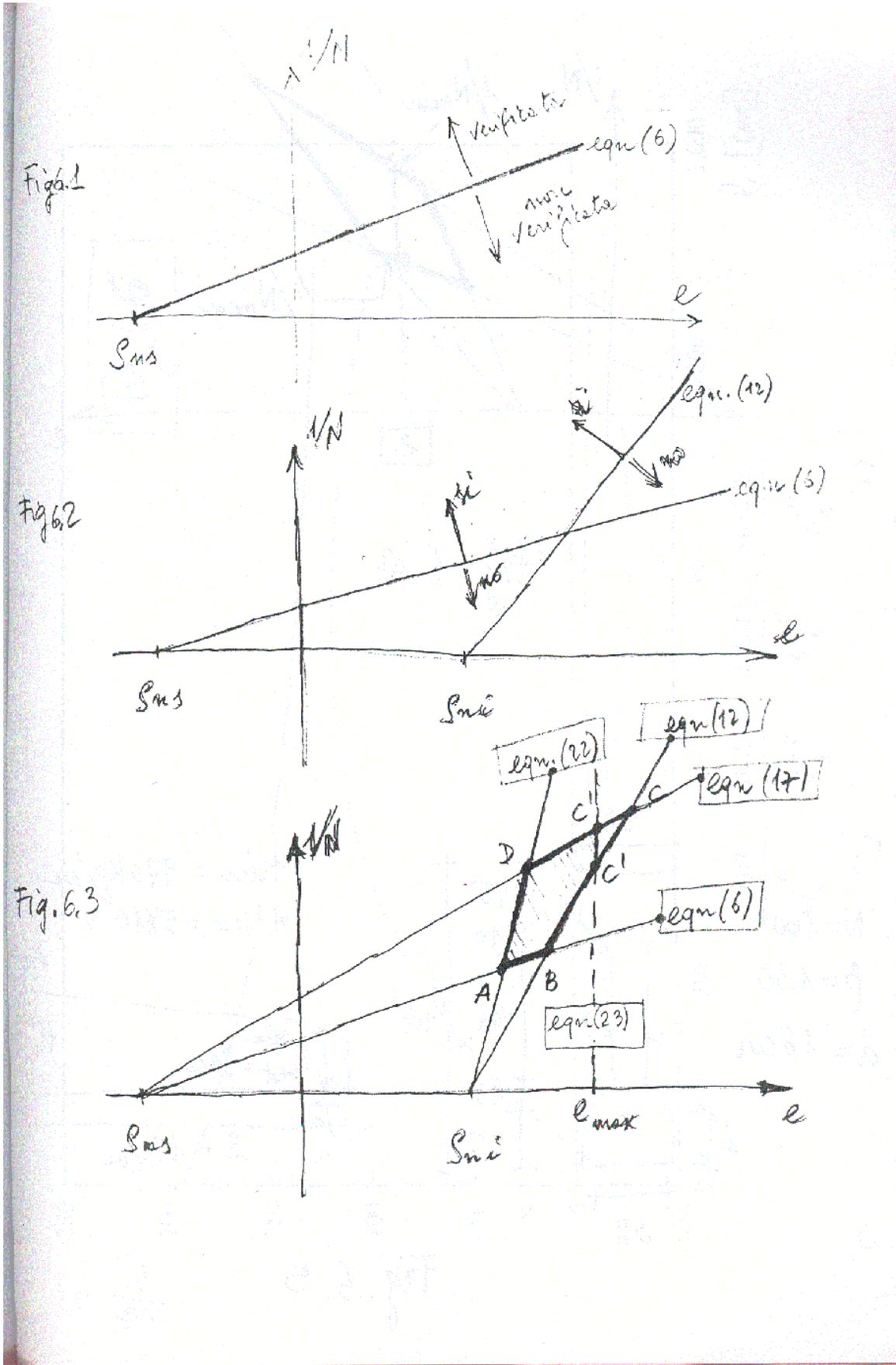
Si osservi che:

- 1) un'ulteriore limitazione è di tipo "costruttiva", e cioè l'eccentricità e non può essere superiore ad un valore e_{\max} che dipende dalla geometria della sezione e dal numero di cavi:

$$e \leq e_{\max} \tag{6.23}$$

Tale limitazione può fornire un taglio verticale al quadrilatero, con quest'ultimo che nel caso di Fig. 6.3 si trasforma nel pentagono ABC'C'D;

- 2) il quadrilatero può degenerare ad un unico punto se la sezione è progettata in maniera ottimale; in fase di progetto si deve comunque tenere conto che il valore di β è noto solo in termini approssimati e quindi è necessario avere dei margini di sicurezza nei riguardi delle verifiche;
- 3) assegnata la geometria della sezione, il progetto più "economico" è quello sviluppato con il minimo valore dello sforzo normale di precompressione, ovvero seguendo il punto di massima ordinata del dominio delle soluzioni ammissibili (nell'esempio di Fig. 6.3 il punto C');



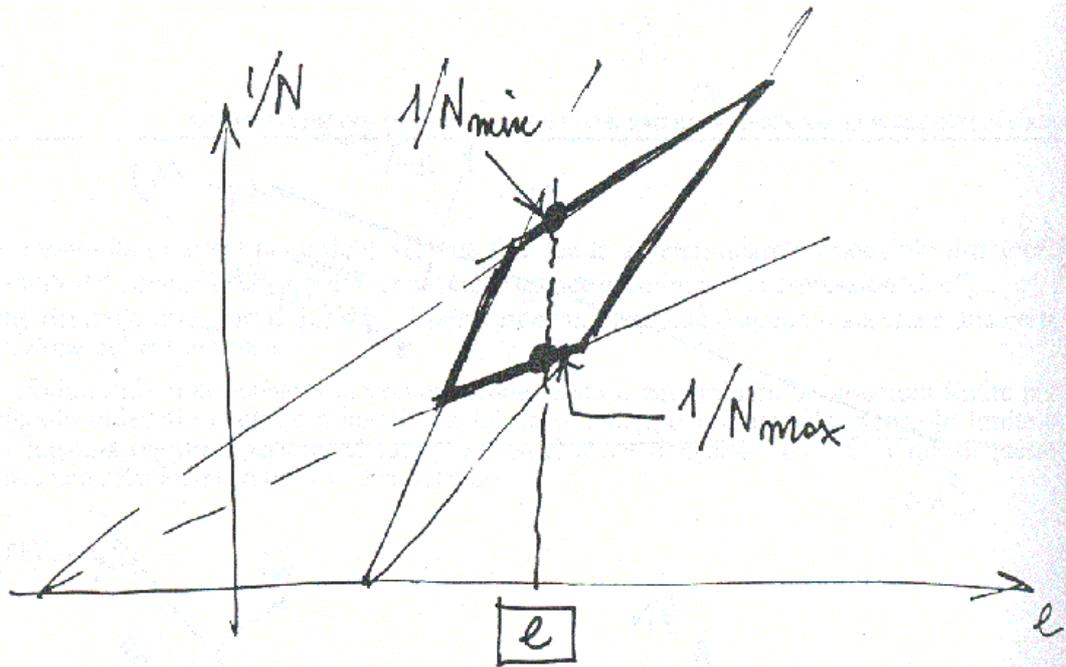


Fig. 6.4

	$K_{max}^o = 0.48R_{ck}$	$K_{min}^o = -0.08R_{ck}$	$K_{max} = 0.38R_{ck}$	$K_{min} = -0.06R_{ck}$
$R_{ck} = R_{ckj} = 450$	216	-36	171	-27
$R_{ck} = R_{ckj} = 500$	240	-40	190	-30
$R_{ck} = R_{ckj} = 550$	264	-44	209	-33

tratto dagli "Appunti del Corso di Prefabbricazione strutturale" del prof. E. Cosenza, Università di Napoli "Federico II":